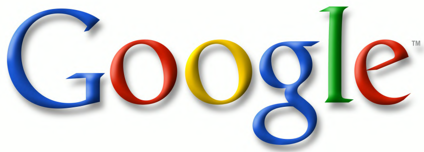
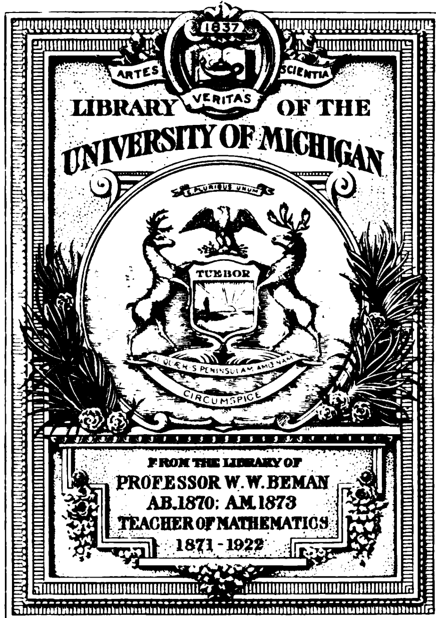



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
AB.1870: AM.1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871 - 1922

G

LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

OUVRAGES DES MÊMES AUTEURS

DE M. B. NIEWENGLOWSKI

Cours d'Algèbre, à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales et des candidats à l'École normale supérieure et à l'École Polytechnique. 2 vol. in-8, brochés, 5e édition. Paris, Armand Colin et Cie .... **16** fr. »

Cours de Géométrie analytique, à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales et des candidats aux écoles du Gouvernement. Paris, Gauthier-Villars.

Tome I. — Sections coniques .... **10** fr. »

Tome II. — Construction des courbes planes. Compléments relatifs aux coniques .... **8** fr. »

Tome III. — Géométrie de l'espace avec une Note sur les transformations en Géométrie, par M. E. Borel .... **14** fr. »

DE M. L. GÉRARD

Manuels des Baccalauréats de l'enseignement secondaire. Paris, F.-R. de Rudeval, éditeur, 4, rue Antoine-Dubois. On vend séparément :

Arithmétique	**1** fr. **50**
Géométrie	**2** fr. **50**
Trigonométrie	**1** fr. **25**
Géométrie descriptive	**1** fr. **75**
Compléments de géométrie descriptive	**0** fr. **50**

Bulletin de Sciences mathématiques et physiques élémentaires, par MM. L. Gérard et Ch. Michel, docteurs ès sciences, Paris, F.-R. de Rudeval, éditeur, 4, rue Antoine-Dubois.

Abonnement d'un an (20 numéros). { France .... **5** fr. » ; Étranger .... **6** fr. » }

LEÇONS

DE

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Conformes aux programmes du 27 juillet 1905
pour les classes de Première C et D et de Mathématiques A et B

PAR MM.

B. NIEWENGLOWSKI

Inspecteur général de l'Instruction publique, Docteur ès Sciences

ET

L. GÉRARD

Professeur au collège Chaptal, Docteur ès Sciences

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1907

DEUXIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

LIVRE V

DROITES ET PLANS

CHAPITRE PREMIER

LE PLAN

1. On appelle *plan* une surface indéfinie telle que la droite qui passe par deux quelconques des points de cette surface y soit contenue tout entière.

Il ne semble pas possible de prouver *a priori* l'existence d'une telle surface. Tout le monde en a la notion : la surface des eaux d'un lac donne l'image d'une portion de plan, image d'autant plus parfaite que ce lac est moins étendu et que l'eau est plus tranquille.

2. **Théorème fondamental.** — *Par trois points non situés en ligne droite, on peut faire passer un plan, et on n'en peut faire passer qu'un seul.*

Cette proposition, qui constitue la propriété caractéristique du plan, a été déjà établie en *géométrie plane* [G. P. 11] (*). On peut d'ailleurs admettre la première

(*) G. P. désigne, dans ce volume, les renvois à la *Géométrie plane*.

partie. D'après cela, on désigne un plan en énonçant les lettres qui indiquent trois de ses points : le plan ABC est le plan passant par les points A, B, C. Mais souvent il suffira d'une seule lettre pour nommer un plan.

COROLLAIRES. — I. — *Deux droites qui se coupent déterminent un plan, et un seul.*

Il suffit de prendre sur chacune des droites un point autre que celui qui leur est commun ; on a ainsi trois points par lesquels on peut faire passer un seul plan et ce plan contient les deux droites données.

II.— *Deux droites parallèles déterminent un seul plan.*

Par définition, deux droites parallèles sont dans un même plan. En outre, si l'on prend deux points sur l'une des deux droites parallèles données et un troisième point sur la seconde, on ne peut faire passer qu'un seul plan par ces trois points.

III.— *Une droite et un point non situé sur cette droite déterminent un seul plan.*

Il suffit de considérer, outre le point donné, deux points pris sur la droite. Ces trois points déterminent un seul plan qui contient le point et la droite donnés.

3. *Modes de génération d'un plan.*

1° La droite qui tourne autour d'un point fixe A (fig. 1) et s'appuie constamment sur une droite BC, ne passant pas par A, *engendre* le plan passant par le point A et la droite BC ; on remarquera que la parallèle à BC menée par A appartient au plan.

2° Une droite se meut en s'appuyant sur une droite fixe

BC (fig. 2) et en restant parallèle à une deuxième droite EF, que nous supposerons menée par un point E de BC; elle

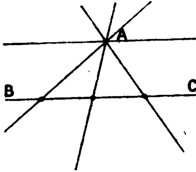


Fig. 1.

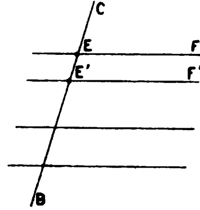


Fig. 2.

engendre le plan déterminé par les deux droites BC et EF. En effet, la parallèle à EF issue du point E′ pris sur BC est dans le plan E′EF.

INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

4. Il résulte de la définition du plan que toute droite qui n'est pas contenue dans un plan ne peut avoir avec lui plus d'un point commun. Par exemple, si le point A est dans le plan P et le point B hors de ce plan, la droite AB n'a pas d'autre point commun avec ce plan que le point A; car si elle en avait un second, elle serait contenue tout entière dans le plan P, ce qui ne peut être, puisque le point B a été choisi hors de ce plan.

5. Un plan quelconque P partage l'espace en *deux régions :* l'ensemble de tous les points qui sont situés *d'un côté* du plan constituent l'une de ces régions, les points situés de *l'autre côté* du plan appartiennent à l'autre région.

Nous admettrons que la droite qui joint un point A pris dans l'une de ces régions à un second point A′ pris dans l'autre, rencontre le plan P en un point B situé

entre A et A′, de sorte que la demi-droite BA est tout entière dans la première région et la demi-droite BA′ tout entière dans la seconde.

Si une droite et un plan ont un seul point commun, nous admettrons encore que ce point partage la droite en deux demi-droites, l'une de ces demi-droites étant dans l'une des régions déterminées par le plan et la seconde dans l'autre. On dit alors que la droite *perce* le plan ou que le plan *coupe* la droite.

6. Nous verrons plus loin [9] qu'une droite peut n'avoir aucun point commun avec un plan; on dit alors que la droite est *parallèle* au plan. D'après cela, une droite et un plan peuvent occuper trois positions relatives différentes. La droite peut :

1° être parallèle au plan;

2° le percer;

3° y être contenue.

Remarque. — Quand une droite CD perce un plan P contenant une droite AB en un point C *non situé sur* AB, il n'y a aucun plan qui contienne ces deux droites; car un pareil plan devant contenir AB et le point C serait confondu avec le plan P, ce qui est impossible, puisque la droite CD n'est pas dans ce plan. On dit alors que les deux droites ne sont pas situées dans un même plan.

Quand les côtés d'un polygone ne sont pas tous dans un même plan on dit que ce polygone est *gauche*.

7. Intersection de deux plans. — Nous verrons plus loin [48] que deux plans peuvent n'avoir aucun point commun. Dans ce cas on dit qu'ils sont *parallèles*.

Si deux plans ont trois points communs non situés en ligne droite, ils coïncident [2].

Si deux plans ont deux points communs, la droite qui joint ces deux points est tout entière dans chacun d'eux et les deux plans ont une droite commune; ils ne peuvent d'ailleurs avoir aucun point commun hors de cette droite [2. Cor. III].

Remarquons enfin qu'il est impossible que deux plans n'aient qu'un seul point commun. On peut l'admettre; on peut aussi raisonner de la manière suivante. Soit A un point commun à deux plans P, Q. Je dis qu'on peut toujours tracer dans le plan P un triangle ABC, ayant un sommet en A et les deux autres sommets situés *de part et d'autre* du plan Q; en effet, si B et C sont d'un même côté du plan Q, il suffit de prendre, par exemple, le symétrique B′ de B par rapport à A; B′ est alors évidemment [5] de l'autre côté du plan Q, car la droite BAB′ perce ce plan; donc, C et B′ étant dans deux régions différentes relativement au plan Q, la droite CB′ rencontre ce plan en un point D, qui appartient au plan P, lequel contient la droite CB′; donc P et Q se coupent suivant AD.

On peut, d'après ce qui précède, dire que :

L'intersection de deux plans distincts (non parallèles) est une ligne droite.

Remarque. — Les quatre côtés d'un parallélogramme étant dans un même plan, on représente le plus souvent un plan en dessinant un parallélogramme. Mais il faut s'habituer à *voir* le plan défini par deux droites issues d'un même point, ou par trois points non en ligne droite.

EXERCICE

Si trois plans se coupent deux à deux, leurs intersections concourent en un même point ou sont parallèles deux à deux.

CHAPITRE II

DROITE ET PLAN PARALLÈLES

8. On dit qu'une droite et un plan sont *parallèles* quand ils n'ont aucun point commun.

On dit encore, dans ce cas, que la droite est parallèle au plan, ou que le plan est parallèle à la droite.

9. ***Théorème.*** — *Toute droite* AB (fig. 3) *menée par un point* A *pris hors d'un plan* P *et parallèle à une droite* CD *tracée dans ce plan, est parallèle à ce même plan.*

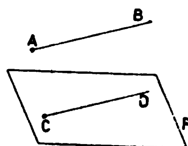


Fig. 3.

En effet, les droites AB, CD définissent un plan Q qui coupe le plan P précisément suivant CD. Donc, si AB rencontrait le plan P, le point d'intersection appartenant au plan Q qui contient tous les points de AB, serait sur CD, ce qui est impossible, puisque AB et CD sont parallèles.

Remarque. — On pourrait donner un énoncé plus simple : *Toute droite* AB *parallèle à une droite* CD *appartenant à un plan* P *est parallèle à ce plan.* Mais il faut remarquer que la droite AB pourrait être située dans le plan P. C'est pour cela que nous avons pris le point A hors du plan P.

10. ***Théorème.*** — *Quand une droite* AB (fig. 3) *est parallèle à un plan* P, *le plan mené par* AB *et par un point* C *du plan* P, *coupe ce plan suivant une parallèle à* AB.

En effet, l'intersection CD des deux plans et la droite AB sont dans un même plan et ne peuvent se rencontrer, puisque AB est parallèle au plan P. Donc AB et CD sont parallèles.

11. **Théorème.** — *Si la droite* AB (fig. 3) *est parallèle au plan* P, *la parallèle à* AB *menée par un point* C *du plan* P *est tout entière dans ce plan.*

En effet, le plan ABC coupe le plan P suivant la parallèle à AB menée par C [10].

Corollaire. — *Si une droite* AB *coupe un plan* P, *toute droite* CD *parallèle à* AB *le coupe aussi;* car si CD était parallèle au plan P ou y était contenue, la droite AB menée par un point de ce plan, parallèlement à CD, y serait contenue. Donc :

Si une droite est parallèle à un plan, toute droite parallèle à la première est parallèle au même plan, à moins qu'elle n'y soit contenue.

12. **Théorème.** — *Toute droite parallèle à deux plans qui se coupent est parallèle à leur intersection.*

En effet, la parallèle à la droite donnée menée par un point quelconque de l'intersection des deux plans est contenue dans chacun d'eux [11]; cette parallèle est donc elle-même l'intersection des deux plans.

13. **Théorème.** — *Le lieu des parallèles menées à une droite par tous les points d'une seconde droite (non parallèle à la première) est un plan parallèle à la première droite.*

Soient (fig. 4) AB et CD deux droites non situées dans un même plan. Par un point quelconque M de AB

menons la droite MN parallèle à CD. Le plan déterminé par les deux droites AB et MN est parallèle à CD [9] et toute parallèle à CD menée par un point quelconque de AB est dans ce plan, qui est le lieu cherché.

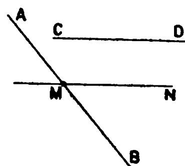


Fig. 4.

Si la droite CD rencontrait la droite AB, le lieu des droites MN serait le plan de ces deux droites. La proposition que nous venons de démontrer est la généralisation de celle qui a été établie plus haut [3, 2°].

Corollaire. — *Si deux droites ne sont pas situées dans un même plan, on peut mener par l'une un plan parallèle à l'autre, et on n'en peut mener qu'un.*

14. **Théorème.** — *Les deux plans menés par deux parallèles et un point pris hors de leur plan se coupent suivant une droite parallèle à chacune des deux droites données.*

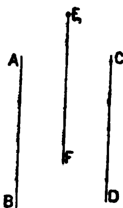


Fig. 5.

Soient (fig. 5) AB et CD deux droites parallèles, et soit E un point pris hors du plan de ces deux droites. La droite AB est parallèle au plan CDE [9]; donc le plan ABE coupe le plan CDE suivant une droite EF parallèle à AB [10]. On verrait de même que l'intersection des deux plans est parallèle à CD.

EXERCICES

1. Mener par un point une droite qui s'appuie sur deux droites données. — On dit qu'une droite s'appuie sur une autre quand elle la rencontre. La droite cherchée est l'intersection des deux plans

menés par le point donné et chacune des deux droites. — Discussion. — La droite obtenue peut être parallèle à l'une des deux droites, ou même aux deux, si ces droites sont parallèles. On regarde encore une pareille droite comme s'appuyant sur les deux droites données.

2. Mener une droite parallèle à une droite donnée A et s'appuyant sur deux droites données B, C. — La droite cherchée est l'intersection du plan parallèle à A mené par B et du plan parallèle à la même droite A et mené par C. — Discussion.

3. Étant données trois droites quelconques A, B, C, il y a, en général, une infinité de droites qui les rencontrent.

4. Étant données deux droites A, B, non situées dans un même plan, un point M parcourt A, un point M' parcourt B. Lieu du point P qui partage MM' dans un rapport donné.

5. Lieu du même point P en supposant en outre que MM' reste parallèle à un plan donné.

6. Étant données trois droites deux à deux non situées dans un même plan, trouver une sécante qui soit partagée par ces trois droites dans un rapport donné.

7. Mener une droite de longueur donnée, parallèle à un plan donné et s'appuyant sur deux droites données.

CHAPITRE III

ANGLES DE DROITES NON SITUÉES DANS UN MÊME PLAN

15. ***Théorème.*** — *Deux droites parallèles à une même droite sont elles-mêmes parallèles.*

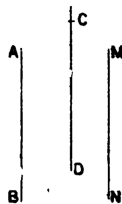


Fig. 6.

Supposons que les droites AB et CD (fig. 6) soient parallèles à une troisième droite MN; celle-ci est parallèle au plan ABC déterminé par la droite AB et un point quelconque C pris sur CD [9]; la droite CD menée par C et parallèle à MN est donc dans le plan ABC [11]. Les deux droites AB et CD sont par suite dans un

même plan ; en outre, elles ne peuvent se rencontrer, puisqu'on ne peut mener qu'une parallèle à MN par un point donné ; donc AB et CD sont parallèles.

On peut dire aussi que les deux droites AB et CD sont dans le plan parallèle à MN mené par une droite quelconque s'appuyant sur ces deux droites [13].

16. Remarque. — Considérons deux demi-droites OA, O'A', (fig. 7) portées par deux droites parallèles et menons par les origines O, O' de ces demi-droites un plan P ne contenant pas ces demi-droites. Nous dirons que OA et O'A' sont *de même sens*, si ces demi-droites sont tout entières du même côté par rapport à P. S'il en est ainsi, les demi-droites OB, O'B', respectivement opposées aux premières, seront aussi de même sens ; tandis que OA et O'B' sont *de sens contraires*, ainsi que OB et O'A'. On peut remarquer que si le plan P tourne autour de OO', les demi-droites OA et O'A' resteront toujours d'un même côté par rapport à ce plan, dans chacune de ses positions.

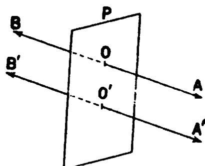


Fig. 7.

17. **Théorème.** — *Deux angles dont les côtés sont parallèles et de même sens, ou de sens contraires chacun à chacun, sont égaux ; deux angles ayant leurs côtés parallèles sont supplémentaires si l'un des côtés du premier est de même sens que le côté du second qui lui est parallèle, les deux autres côtés étant de sens contraires.*

Soient (fig. 8) OA, O'A' deux demi-droites parallèles et de même sens, et OB, O'B' deux demi-droites parallèles et de même sens. Prenons $\overline{OA} = \overline{O'A'}$, $\overline{OB} = \overline{O'B'}$; la figure OAA'O' ayant deux côtés opposés égaux, parallèles et de même sens, est un parallélogramme. Donc les segments $\overline{AA'}$ et $\overline{OO'}$ sont égaux, parallèles et de même

sens ; il en est de même de $\overline{BB'}$ et $\overline{OO'}$; donc $\overline{AA'}$ et $\overline{BB'}$ sont égaux, parallèles et de même sens. Il résulte de là que la figure ABB'A' est un parallélogramme ; donc AB = A'B', et, par suite, les deux triangles OAB, O'A'B' sont égaux, comme ayant leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Les angles AOB et A'O'B' sont donc égaux. Soient OC, OD, les demi-droites respectivement opposées aux demi-droites OA, OB : les angles COD et A'O'B' sont égaux, tandis que BOC et A'O'B' sont supplémentaires.

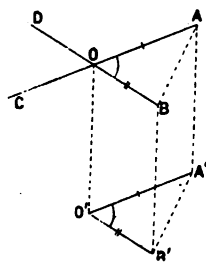


Fig. 8.

Le théorème est donc entièrement établi.

Remarque. — Les plans AOB et A'O'B' sont parallèles. En effet, s'ils se coupaient, leur intersection devrait être parallèle à la fois à AC et à BD [14], ce qui est impossible.

18. Angles de deux droites non situées dans un même plan. — Considérons deux droites AB, CD (fig. 9) *non situées dans un même plan* ; menons par un point quelconque O, les parallèles X'X et Y'Y à ces deux droites. Nous formerons ainsi, au point O, des angles qui ne dépendent que de la direction des droites données, et non de la position du point O, comme cela résulte du théorème précédent, et que nous appellerons *angles des deux droites* considérées.

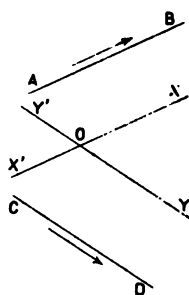


Fig. 9.

Si l'on choisit sur chacune de ces droites un sens dé-

terminé, celui de OX, par exemple, pour la première et celui de OY pour la seconde, nous dirons que XOY est l'angle des deux demi-droites $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.

Si les deux droites X'X, Y'Y sont perpendiculaires, nous dirons que les droites AB et CD sont *orthogonales ;* nous dirons aussi quelquefois qu'elles sont *perpendiculaires*, même si elles ne se rencontrent pas.

19. Problème. — *Mener par un point donné* A (fig. 10) *un plan parallèle à deux droites données* BC, DE.

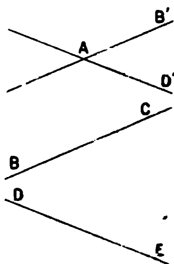


Fig. 10.

Menons par A les droites AB', AD' respectivement parallèles aux deux droites données. Si celles-ci ne sont pas parallèles, les droites AB', AD' seront distinctes, car si elles se confondaient, les droites données seraient parallèles [15]; elles détermineront donc un plan parallèle aux droites données [9]. D'ailleurs, tout plan passant par A et parallèle aux droites données doit contenir AB' et AD' [11]; donc le problème proposé est toujours possible et n'a qu'une seule solution, pourvu que les droites données ne soient pas parallèles.

EXERCICES

1. Dans un polygone gauche d'un nombre pair de côtés, ayant les côtés opposés égaux et parallèles, les droites qui joignent les sommets opposés et celles qui joignent les milieux des côtés opposés passent par un même point.

2. Lieu du milieu d'une droite de longueur constante dont les extrémités s'appuient sur deux plans donnés et qui reste parallèle à une droite donnée. Plus généralement, lieu du point qui partage cette droite dans un rapport donné.

CHAPITRE IV

DROITE ET PLAN PERPENDICULAIRES

20. Définition. — On dit qu'une droite est *perpendiculaire* à un plan quand elle est perpendiculaire à toute droite passant par son pied dans ce plan.

On dit aussi alors que le plan est perpendiculaire à la droite et encore, que la droite et le plan sont perpendiculaires.

21. **Théorème.** — *Toute droite perpendiculaire à deux droites passant par son pied dans un plan, est perpendiculaire à ce plan.*

Par un point B (fig. 11) pris sur une droite AB, on peut mener une infinité de perpendiculaires à cette droite. Soient BC et BD deux de ces perpendiculaires ; je dis que AB est perpendiculaire au plan P déterminé par BC et BD. En effet, soit BE une droite quelconque tracée par B dans le plan P ; menons dans ce plan une droite qui coupe BC, BE, BD aux points C, E, D et joignons ces points au point A et au point A′ symétrique de A par rapport à B. La droite BC et la droite BD étant toutes les deux perpendiculaires au milieu de AA′, on a : CA = CA′ et DA = DA′. On en conclut que les triangles ADC et A′DC sont égaux ; il en résulte immédiatement que EA = EA′ et, par suite, que BE est perpendiculaire au milieu de AA′. La droite AB étant perpendiculaire à toute droite située

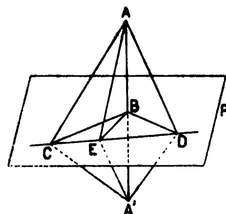


Fig. 11.

dans le plan P et passant par son pied, est perpendiculaire à ce plan [20].

22. **Théorème.** — *Si une droite est perpendiculaire à un plan, toute perpendiculaire à cette droite menée par son pied est dans ce plan.*

Supposons la droite AB perpendiculaire au plan P et soit BC une perpendiculaire à AB. L'intersection du plan P et du plan ABC est perpendiculaire à AB [20] et, comme on ne peut mener par le point B, dans le plan ABC, qu'une seule perpendiculaire à AB, la droite BC se confond avec cette intersection ; ce qui revient à dire que BC est dans le plan P.

23. **Théorème.** — *Si une droite est perpendiculaire à un plan, toute parallèle à cette droite est perpendiculaire au même plan.*

Supposons que AB (fig. 12) soit perpendiculaire au plan P, et soit CD une parallèle à AB. Nous savons [11. Cor.] que CD rencontre le plan P. Menons par son pied D une droite quelconque DE, et par B, pied de AB, la droite BF parallèle à DE. La droite BF est dans le plan P, donc l'angle ABF est droit ; il en est de même de son égal CDE. La droite CD, perpendiculaire à toute droite menée par son pied dans le plan P, est donc perpendiculaire à ce plan.

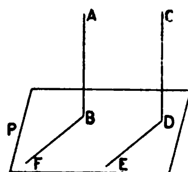


Fig. 12.

24. **Théorème.** — *Quand une droite* AB (fig. 13) *est perpendiculaire à un plan* P, *elle est orthogonale à toute droite située dans ce plan, ou parallèle à ce même plan.*

En effet, si AB est perpendiculaire au plan P, elle est perpendiculaire à la droite BE menée parallèlement à toute droite CD située dans le plan P, ou parallèle à P ; car BE est alors dans le plan P ; donc AB et CD sont orthogonales. On peut encore énoncer ainsi ce théorème :

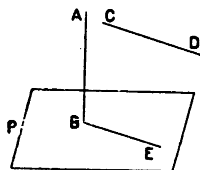


Fig. 13.

Toute parallèle à un plan est orthogonale à toute perpendiculaire à ce plan.

25. Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une droite soit perpendiculaire a un plan.

Je dis que si AB (fig. 14) est orthogonale à deux droites CD, EF, non parallèles, situées dans un même plan P, ou parallèles à ce plan, la droite AB est perpendiculaire au plan P.

En effet, si nous menons par un point G, pris dans le plan P, les droites GH, GK, GL, respectivement parallèles à AB, CD, EF ; GK et GL sont dans le plan P [11]. La droite GH est perpendiculaire à GK et à GL [18] ; elle est donc perpendiculaire au plan P [21], et, par suite, il en est de même de la droite AB, qui lui est parallèle [23]. De là résulte ce théorème très important :

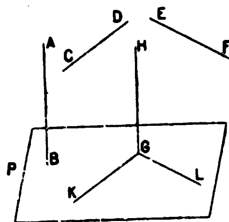


Fig. 14.

Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux droites, non parallèles, situées dans ce plan, ou parallèles à ce même plan.

26. **Théorème.** — *Par tout point on peut mener un plan perpendiculaire à une droite, et un seul.*

Si le point donné A (fig. 15) est sur la droite AB, menons par cette droite deux plans quelconques et, dans chacun d'eux, la perpendiculaire à AB issue du même point A. Le plan des deux droites AC, AD, ainsi obtenues, est perpendiculaire à AB. On ne peut mener par A un second plan perpendiculaire à AB, car un pareil plan doit contenir les droites AC et AD.

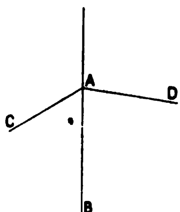


Fig. 15.

En second lieu, soit à mener par le point C (fig. 16), extérieur à AB, un plan perpendiculaire à cette droite. Si le point de rencontre du plan cherché et de AB est en D, la droite CD est perpendiculaire à AB. Ce plan est donc déterminé par la perpendiculaire CD abaissée de C sur AB, et par une autre droite DE menée par D et perpendiculaire à AB. Il n'y a qu'un plan répondant à la question, car un pareil plan doit passer par le point D.

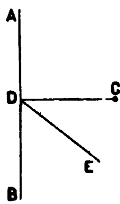


Fig. 16.

27. **Théorème.** — *Le lieu des perpendiculaires à une droite* AB *menées par un point* O *est le plan perpendiculaire à cette droite et mené par ce point.*

En effet, deux des perpendiculaires déterminent un plan qui est le plan perpendiculaire à AB mené par le point O [26]; donc toutes les perpendiculaires sont dans ce plan. D'ailleurs, toute droite de ce plan est perpendiculaire à AB. Le lieu est donc bien ce plan tout entier.

Remarque. — Il convient de remarquer que le point O peut être donné sur la droite AB ou hors de cette droite.

28. **Théorème.** — *On peut mener, par un point*

donné, une perpendiculaire à un plan donné, et une seule.

Soit A (fig. 17 et 18) le point donné, situé dans le plan P, ou hors de ce plan.

Traçons dans le plan P deux droites non parallèles CD, EF. Si une droite passant par A est perpendiculaire au plan P et, par suite, orthogonale aux deux droites CD, EF, elle se trouve à la fois [27] dans les deux

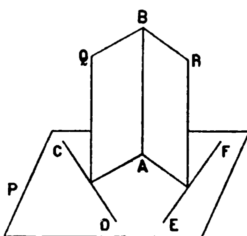


Fig. 17.

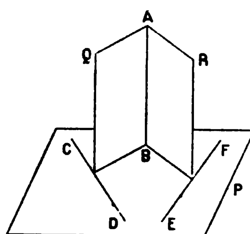


Fig. 18.

plans Q et R menés par A perpnediculairement à ces deux droites; et réciproquement. Or, les deux plans Q et R sont distincts; car, s'ils se confondaient, leur intersection avec le plan P serait perpendiculaire aux droites CD, EF et alors ces deux droites seraient parallèles, ce qui est contre l'hypothèse. Donc les deux plans Q et R se coupent, leur intersection AB passe par le point A, est perpendiculaire au plan P, et c'est la seule perpendiculaire au plan P qu'on puisse mener par le point A.

29. Définition. — Toute droite qui rencontre un plan sans lui être perpendiculaire est dite *oblique* à ce plan.

30. **Théorème.** — *Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles.*

En effet, si par un point de l'une de ces droites, on mène la parallèle à l'autre, on obtiendra [23] une perpendiculaire à ce plan, qui se confondra avec la première droite [28].

31. **Théorème des trois perpendiculaires.** — *Si l'on abaisse d'un point* A *pris hors d'un plan, la perpendiculaire à ce plan et la perpendiculaire à une droite* CD *tracée dans le même plan, la droite* BE *qui joint les pieds de ces deux perpendiculaires, est perpendiculaire à* CD.

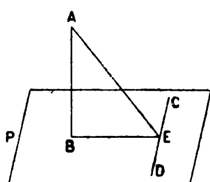


Fig. 19.

En effet, les droites AB et CD (fig. 19) sont orthogonales [24]; en outre, CD est, par hypothèse, perpendiculaire à AE. Il en résulte que CD est perpendiculaire au plan BAE, et par suite à BE, qui est dans ce plan.

Réciproquement. — Supposons que AB soit perpendiculaire au plan P et BE perpendiculaire à CD, je dis que AE sera perpendiculaire à CD. En effet, CD est encore, en vertu des nouvelles hypothèses, perpendiculaire au plan ABE, et, par suite, elle est perpendiculaire à AE, qui est dans ce plan.

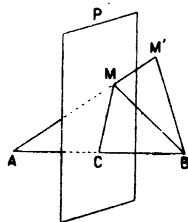


Fig. 20.

32. **Théorème.** — *Le plan perpendiculaire au milieu d'une droite est le lieu des points à égales distances de ses extrémités.*

En effet :

1° Soit M (fig. 20) un point du plan P perpendicu-

laire au milieu C de AB ; la droite MC est perpendiculaire au milieu de AB : donc MA = MB.

2° Soit M′ un point pris hors du plan P et situé, par exemple, du même côté que B. La droite M′A rencontre le plan P en un point M ; dans le plan AMB, le point M′ et le point B sont d'un même côté de la perpendiculaire au milieu de AB ; donc M′B < M′A [G. P. 57].

Le théorème est ainsi établi.

Corollaires. — I. — *Si trois points* A, B, C, *non situés en ligne droite, sont également distants de deux points* M, M′, *le plan* ABC *est perpendiculaire au milieu de la droite* MM′.

On suppose AM = AM′, BM = BM′, CM = CM′. Le plan perpendiculaire au milieu de MM′ passe donc par chacun des points A, B, C, ce qui revient à dire que le plan ABC est perpendiculaire au milieu de MM′.

II. — *Si les distances d'un point* M *à trois points* A, B, C *non situés en ligne droite sont respectivement égales aux distances d'un point* M′ *aux trois mêmes points, les deux points* M *et* M′ *coïncident, s'ils sont situés d'un même côté du plan* ABC*; ou sont symétriques par rapport à ce plan, s'ils sont de part et d'autre.*

Remarque. — On dit que deux points M, M′ sont *symétriques par rapport à un plan*, quand ce plan est perpendiculaire au milieu de MM′.

33. **Théorème.** — *Si d'un point pris hors d'un plan on mène à ce plan la perpendiculaire et différentes obliques :*

1° *La perpendiculaire est plus courte que chaque oblique ;*

2° *Deux obliques dont les pieds s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales ;*

3° *De deux obliques dont les pieds s'écartent inéga-*

lement de celui de la perpendiculaire, la plus grande est celle dont le pied s'écarte le plus.

1° Soit AB (fig. 21) la perpendiculaire abaissée de A sur le plan P, et soit AC une oblique ; nous considérons les segments ayant pour extrémités le point A et les pieds B et C de ces deux droites. On a

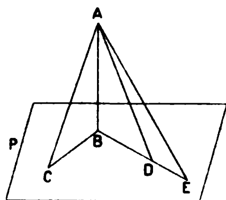


Fig. 21.

$$AB < AC;$$

car AB est perpendiculaire à BC et AC lui est oblique.

2° Soient AC et AD deux obliques. Si $BC = BD$, les deux triangles rectangles ABC et ABD sont égaux comme ayant les côtés de l'angle droit égaux chacun à chacun; donc $AC = AD$.

3° Supposons $BC < BE$ et prenons sur BE un segment $BD = BC$. On a, dans le plan ABE :

$$AD < AE,$$

et comme $AC = AD$,

$$AC < AE.$$

Les réciproques sont vraies ; il suffit d'appliquer le principe de réciprocité [G. P., 19].

Corollaire. — On appelle *axe* d'un cercle, la perpendiculaire au plan de ce cercle menée par son centre.

Les droites qui joignent un même point de l'axe d'un cercle à des points quelconques de ce cercle sont égales, comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire.

34. *Distance d'un point à un plan.* — Le segment AB de la

perpendiculaire, abaissée d'un point A situé hors d'un plan P sur ce plan, B désignant le pied de cette perpendiculaire, est, comme on vient de le voir, la plus petite distance du point A à un point de ce plan; pour cette raison, le segment AB se nomme la *distance du point* A *au plan* P. Il s'agit ici de valeur absolue. Dans certaines questions, il peut se faire qu'on ait à considérer différents points $A, A', A''...$ et leurs distances à un même plan; il est alors, le plus souvent, indispensable de donner un signe aux distances. Si les pieds des perpendiculaires abaissées de ces points sont $B, B', B''...$ respectivement, on considérera les segments $\overline{BA}$, $\overline{B'A'}$, $\overline{B''A''}$..., et on regardera comme positives les mesures algébriques de ceux qui sont dirigés dans un sens et comme négatives celles des segments dirigés en sens contraire. Cela revient à dire que les distances au plan P des points qui sont d'un côté de ce plan sont positives et celles des points situés de l'autre côté négatives, les distances positives correspondant d'ailleurs à celle des deux régions qu'on voudra.

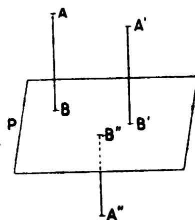


Fig. 22.

Ainsi, sur la figure ci-contre (fig. 22), on peut regarder $\overline{BA}$, $\overline{B'A'}$ comme positifs et $\overline{B''A''}$ comme négatif, ou inversement, les points A, A′ étant d'un côté du plan P et le point A″ de l'autre côté.

EXERCICES

1. Trouver sur un plan un point dont la somme ou la différence des distances à deux points donnés hors de ce plan soit minimum.

2. Une droite est perpendiculaire à un plan quand elle fait des angles égaux avec trois droites parallèles à ce plan, ou contenues dans ce plan.

3. Les plans perpendiculaires au milieu des cordes d'un même cercle ont une droite commune.

4. Lieu géométrique des points d'un plan qui sont également éloignés de deux points hors de ce plan.

5. Lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées

d'un point pris hors d'un plan sur les droites menées dans ce plan par un point fixe.

6. Mener par un point D un plan dont les distances à trois points donnés A, B, C, soient proportionnelles à trois longueurs données *a*, *b*, *c*. — On détermine les points où le plan cherché coupe AB, BC, CA.

7. Mener par une droite un plan dont les distances à deux points donnés soient dans un rapport donné.

CHAPITRE V

ANGLES DIÈDRES

35. Définition. — Une droite indéfinie tracée dans un plan partage ce plan en deux demi-plans. Les points du plan situés d'un côté de la droite appartiennent à l'un des demi-plans, les points situés de l'autre côté de la même droite appartiennent à l'autre demi-plan. La droite considérée est la droite *origine* commune aux deux demi-plans.

On désigne un demi-plan au moyen de trois lettres, les deux premières désignant la droite origine du demi-plan et la troisième désignant un point quelconque du demi-plan.

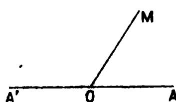


Fig. 23.

Soient (fig. 23) OA, OA′ les deux demi-droites opposées déterminées par un point O d'une droite indéfinie AA′ tracée dans un plan P. Si une demi-droite OM tourne dans ce plan autour du point O dans un sens déterminé en partant de la position OA, elle aura balayé l'un des demi-plans déterminé par AA′ quand elle sera venue en OA′; puis, de la position OA′ à la position OA, en

continuant à tourner dans le même sens, elle aura balayé l'autre demi-plan.

36. Quand deux demi-plans portés par deux plans distincts partent d'une même droite, on dit qu'ils forment un *angle dièdre*, ou simplement un *dièdre*. Ainsi, par exemple, les deux demi-plans ABC, ABD (fig. 24) issus de la droite indéfinie AB forment un dièdre, qu'on désigne par la notation CABD, en ayant soin de placer au milieu les deux lettres A et B qui désignent la droite AB, qu'on nomme l'*arête* du dièdre. Les deux demi-plans qui forment le dièdre se nomment les *faces* de ce dièdre.

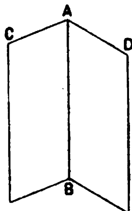


Fig. 24.

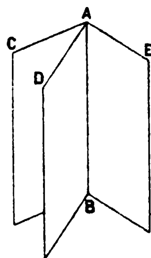


Fig. 25.

On dit que deux dièdres sont *égaux*, quand on peut faire coïncider les faces de l'un avec celles de l'autre, ce qui entraîne la coïncidence de leurs arêtes.

On appelle *somme* de deux dièdres, le dièdre obtenu en plaçant ces deux dièdres l'un à la suite de l'autre, de façon que leurs arêtes coïncident et qu'ils aient une face commune. Ainsi (fig. 25) :

$$\text{dièdre CABE} = \text{dièdre CABD} + \text{dièdre DABE}.$$

On dit alors que CABE > CABD.

Il peut arriver que les faces ABC et ABE soient dans le prolongement l'une de l'autre.

On est ainsi amené à employer pour les dièdres les mêmes dénominations que pour les angles plans : angle dièdre plat,

angle dièdre saillant, angle dièdre rentrant. Mais les paragraphes suivants rendent ces dénominations inutiles.

37. Angle rectiligne d'un dièdre. — On appelle *angle rectiligne* d'un dièdre ou plus simplement *rectiligne*, l'angle formé par les deux demi-droites menées par un même point de l'arête, dans chacune des faces et perpendiculaires à l'arête. Ainsi (fig. 26), EF et EG étant menées par un point quelconque E de l'arête AB du dièdre CABD, dans les demi-plans ABC et ABD respectivement, et toutes deux perpendiculaires à AB, FEG est le *rectiligne* du dièdre considéré.

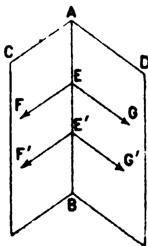


Fig. 26.

Si l'on fait la même construction en partant d'un autre point E' de AB, l'angle obtenu F'E'G' est égal à l'angle FEG [17]. Tous les rectilignes d'un dièdre sont donc égaux.

38. **Théorème.** — *Deux dièdres égaux ont des rectilignes égaux et réciproquement.*

En effet, on peut faire coïncider deux dièdres égaux de façon qu'un point A de l'arête du premier coïncide avec un point A' de l'arête du second et alors les rectilignes des deux dièdres ayant respectivement pour sommets les points A et A' coïncideront. Réciproquement, il est clair que si les rectilignes sont égaux, et qu'on les fasse coïncider, les deux dièdres coïncideront également.

Il en résulte qu'on peut faire coïncider deux dièdres égaux de façon qu'un point *arbitraire* de l'arête du premier coïncide avec un point *arbitraire* de l'arête du second. En d'autres

termes, si deux dièdres coïncident, on peut faire glisser l'un d'eux le long de l'arête commune sans qu'ils cessent de coïncider.

Corollaire. — *Deux dièdres opposés par l'arête sont égaux.*

Soient (fig. 27) CABD et C'ABD' deux dièdres ayant même arête et tels que les faces de l'un soient les prolongements des faces de l'autre; on dit, pour abréger, que les dièdres sont *opposés par l'arête*.

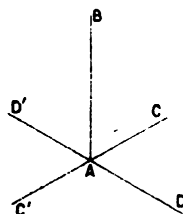


Fig. 27.

Le plan perpendiculaire en A à l'arête AB coupe les plans des faces suivant les deux droites CC', DD'; les rectilignes $\widehat{CAD}$ et $\widehat{C'AD'}$ des deux dièdres sont égaux comme opposés par le sommet; donc les dièdres considérés sont égaux.

Réciproquement. — Si les deux dièdres CABD, C'ABD' ayant l'arête AB commune sont égaux et si la face ABC est le prolongement de la face ABC', et enfin que les deux autres faces soient de part et d'autre du plan BCC', les faces ABD et ABD' sont dans le prolongement l'une de l'autre, car AD et AD' sont sur une même ligne droite.

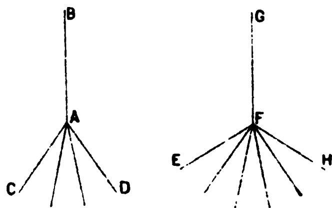


Fig. 28.

39. *Le rapport de deux dièdres est égal à celui de leurs rectilignes.*

Soient (fig. 28) CAD et EFH les rectilignes des dièdres CABD, EFGH; supposons que les rectilignes aient une commune mesure, et soit par exemple :

$$\text{CAD} = \frac{3}{5}\ \text{EFH};$$

on voit immédiatement que le dièdre qui a pour rectiligne le cinquième de EFH est contenu 5 fois dans le dièdre EFGH et 3 fois dans le dièdre CABD, donc

$$\text{CABD} = \frac{3}{5}\ \text{EFGH}.$$

Si les deux rectilignes n'ont pas de commune mesure, on voit encore, en imitant un raisonnement connu, [G. P. p. 73], que si f désigne une fraction quelconque, les deux différences CABD — fEFGH et CAD — fEFH ont le même signe. Donc on a dans tous les cas :

$$\frac{\text{CABD}}{\text{EFGH}} = \frac{\text{CAD}}{\text{EFH}}.$$

40. **Théorème.** — *Si l'on prend pour unité de dièdre un dièdre quelconque, et pour unité d'angle plan le rectiligne de ce dièdre, le nombre qui mesure un dièdre quelconque est égal au nombre qui mesure son rectiligne.*

En effet, le rapport d'un dièdre au dièdre pris pour unité est égal, en vertu du théorème précédent et aussi en vertu des conventions que nous venons de faire, au rapport de son rectiligne à l'angle plan pris pour unité : en d'autres termes, *la mesure d'un dièdre est égale à celle de son rectiligne.*

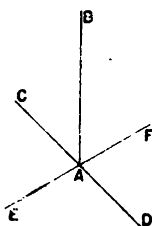


Fig. 29.

On dit quelquefois, sous une forme abrégée et commode, mais incorrecte : *un dièdre a pour mesure son rectiligne.*

En tous cas, il ne faut jamais oublier que les unités de dièdre et d'angle plan se correspondent, l'angle plan pris pour unité étant le rectiligne du dièdre pris pour unité.

41. Dièdre droit. — Considérons (fig. 29) deux plans

qui se coupent suivant AB et soient CD,EF les intersections de ces plans par le plan perpendiculaire à AB mené par A. Les quatre angles CAE, EAD, DAF, FAC sont les rectilignes des dièdres CABE, EABD, DABF, FABC. Si l'un des rectilignes considérés est droit, les trois autres le sont aussi, et les quatre dièdres sont égaux. D'après cela, nous appellerons *dièdre droit*, tout dièdre dont le rectiligne est droit.

Tous les dièdres droits sont égaux, puisque leurs rectilignes sont égaux.

Quand on prend pour unité de dièdre le dièdre droit, il faut prendre pour unité d'angle plan l'angle plan droit.

EXERCICES

1. Que devient le théorème du n° 40 quand on prend pour unité d'angle plan un angle qui soit un multiple donné du rectiligne du dièdre pris pour unité.

2. Si d'un point de l'arête d'un dièdre, on mène dans chaque face une demi-droite faisant un même angle *a* avec l'arête, prouver que l'angle de ces deux demi-droites ne varie pas proportionnellement au dièdre, à moins que l'angle *a* ne soit droit.

CHAPITRE VI

PLANS PERPENDICULAIRES

42. Définition. — Quand l'un des quatre dièdres formés par deux plans qui se coupent est droit, les trois autres le sont aussi [41]. On dit alors que les deux plans sont *perpendiculaires*. Si le dièdre formé par deux demi-plans est droit, on dit aussi que ces demi-plans sont perpendiculaires, comme les plans qui les portent.

43. **Théorème.**— *Quand une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* P, *tout plan* Q *contenant* AB *ou parallèle à* AB *est perpendiculaire au plan* P.

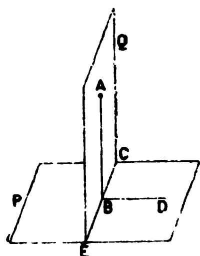


Fig. 30.

En effet, par le pied B (fig. 30) de la perpendiculaire AB au plan P, menons, dans ce plan, la droite BD perpendiculaire à l'intersection CE du plan P et d'un plan Q mené par AB. L'angle ABD est droit ; c'est le rectiligne de l'un des dièdres formés par les deux plans P et Q ; ce dièdre étant droit, les plans P et Q sont perpendiculaires.

Si le plan Q est supposé parallèle à AB, il suffit de remarquer que toute parallèle à AB tracée dans le plan Q est perpendiculaire au plan P ; on est ainsi ramené au premier cas.

44. **Théorème.** — *Quand deux plans sont perpendiculaires, toute perpendiculaire à leur intersection menée dans l'un d'eux est perpendiculaire à l'autre.*

En effet, si les deux plans P et Q sont perpendiculaires et si l'on mène dans le plan Q la droite AB perpendiculaire à leur intersection CE et, dans le plan P, la droite BD perpendiculaire à la même droite CE, le dièdre ACED étant droit, son rectiligne ABD est droit ; donc AB, perpendiculaire à BC et à BD, est perpendiculaire au plan P.

Corollaires. — I. — *Quand deux plans sont perpendiculaires, la perpendiculaire à l'un d'eux menée par un point de l'autre est tout entière dans celui-ci.*

En effet, si les plans P et Q sont perpendiculaires, la perpendiculaire à l'intersection des deux plans, menée dans le plan Q par un point A pris dans le plan Q est perpendiculaire au plan P ; mais par A on ne peut mener qu'une perpendiculaire au plan P, ce qui revient à dire que la perpendiculaire au plan P, menée par A, est dans le plan Q.

II. — *L'intersection de deux plans* P, Q *qui se coupent et sont perpendiculaires à un troisième plan* R *est perpendiculaire à ce dernier.*

En effet, la perpendiculaire au plan R menée par un point commun aux plans P et Q est tout entière dans chacun d'eux ; c'est par suite leur intersection.

III. — *Quand trois plans sont perpendiculaires deux à deux, il en est de même de leurs intersections, et réciproquement.*

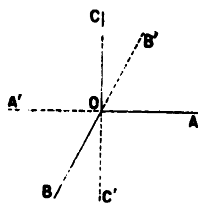


Fig. 31.

Soient (fig. 31) A'A, B'B, C'C les intersections de trois plans rectangulaires deux à deux ;

en vertu du corollaire précédent, A'A est perpendiculaire au plan BOC, donc aux droites B'B, C'C, etc.

Réciproquement, si A'A, B'B, C'C sont perpendiculaires deux à deux, A'A, par exemple, est perpendiculaire au plan BOC; donc les plans BOA et COA qui contiennent cette droite sont perpendiculaires au premier.

45. **Théorème.** — *Quand deux plans sont perpendiculaires, toute droite perpendiculaire à l'un d'eux est parallèle à l'autre ou y est contenue.*

En effet soient P et Q (fig. 32) deux plans perpendiculaires et AB une droite perpendiculaire au plan Q. Si, par un point du plan P, on mène la perpendiculaire CD au plan Q, cette droite sera tout entière dans le plan P; mais AB et CD sont parallèles [30]; donc AB est parallèle au plan P ou contenue dans ce plan, puisqu'elle est parallèle à une droite de ce plan.

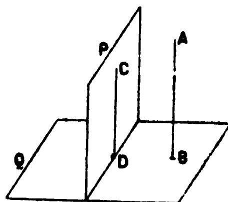


Fig. 32.

Ce théorème peut être considéré comme le réciproque du théorème 43.

46. **Théorème.** — *Par une droite donnée, on peut toujours mener un plan perpendiculaire à un plan donné, et on n'en peut mener qu'un seul si la droite n'est pas perpendiculaire au plan donné.*

En effet, le plan déterminé par la droite donnée AB et par la perpendiculaire au plan P menée par un des points de AB est perpendiculaire au plan P [43].

Un seul plan répond à la question; car s'il y en avait

deux, leur intersection, qui est la droite AB, serait perpendiculaire au plan P; dans ce cas, tout plan mené par AB serait perpendiculaire au plan P.

47. Remarque sur les droites orthogonales. — Quand deux droites AB, CD sont orthogonales, on peut mener par chacune d'elles un plan perpendiculaire à l'autre. Ainsi, par exemple, le plan perpendiculaire à AB, mené par un point quelconque de CD, contient CD. Inversement, si AB est perpendiculaire à un plan mené par CD, les deux droites AB et CD sont orthogonales.

Il convient de remarquer que le plan P mené par AB et perpendiculaire à CD et le plan Q mené par CD et perpendiculaire à AB sont deux plans perpendiculaires. En outre, tout plan mené par CD est perpendiculaire au plan P.

En général, étant données deux droites quelconques, à tout plan M passant par la première, correspond un plan N, perpendiculaire à M et passant par la seconde, et il n'en correspond qu'un seul. Mais s'il y a plus d'un plan perpendiculaire à M et passant par CD, la droite CD est perpendiculaire au plan M, et, par suite, AB et CD sont orthogonales,

Remarquons enfin que, pour exprimer que AB et CD sont orthogonales, il suffit d'exprimer, par exemple, que CD est parallèle à un plan perpendiculaire à AB.

EXERCICES

1. Lieu des points dont les distances à deux plans soient dans un rapport donné.

2. Lieu des points dont les distances à trois plans soient proportionnelles à des nombres donnés.

3. Lieu des points dont la somme des distances à deux plans donnés est constante.

4. Lieu des points dont la somme algébrique des distances à n plans donnés est constante.

CHAPITRE VII

PLANS PARALLÈLES

48. Définition. — On dit que deux plans sont *parallèles* quand ils n'ont aucun point commun.

Théorème. — *Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles.*

En effet, ils ne peuvent avoir aucun point commun, puisqu'on ne peut mener par un point qu'un seul plan perpendiculaire à une droite.

49. Remarque. — Quand deux plans P, Q sont parallèles, toute droite contenue dans l'un est évidemment parallèle à l'autre. Il en résulte que toute parallèle à l'un de ces plans est parallèle à l'autre ou y est contenue. En effet, si la droite AB est parallèle au plan P, on peut mener dans ce plan, par un quelconque de ses points, une droite CD parallèle à AB. La droite CD sera parallèle au plan Q et, par suite, la droite AB sera aussi parallèle au plan Q, ou contenue dans ce plan (11. Cor.). Il résulte de là que toute droite qui rencontre un plan rencontre aussi tous les plans qui sont parallèles au premier.

50. **Théorème.** — *Quand deux plans* P, Q *sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.*

En effet, si la droite AB est perpendiculaire au plan P, elle est perpendiculaire à toute droite parallèle à P, et par suite à toute droite parallèle à Q.

Corollaires. — I. — *Quand deux plans sont parallèles, une droite perpendiculaire à l'un de ces plans et une seconde droite perpendiculaire à l'autre plan sont parallèles.*

Car, si la droite AB est perpendiculaire au plan P, toute droite CD perpendiculaire à un plan Q parallèle à P, est aussi perpendiculaire au plan P ; les droites AB et CD sont donc parallèles, puisqu'elles sont perpendiculaires à un même plan.

II. — *Deux plans respectivement perpendiculaires à deux droites non parallèles, se rencontrent.*

En effet, si ces plans étaient parallèles, les deux droites seraient elles-mêmes parallèles, en vertu du corollaire précédent.

51. **Théorème.** — *Par un point* A *pris hors d'un plan* P *on peut mener un plan parallèle à ce plan et on n'en peut mener qu'un seul.*

En effet, le plan Q mené par A et perpendiculaire à la droite AB perpendiculaire au plan P, est parallèle au plan P [48].

En second lieu, si Q′ est un plan passant par A et parallèle à P, le plan Q′ sera perpendiculaire à AB [50] ; donc il se confondra avec le plan Q.

Corollaire. — *Quand deux plans sont parallèles, tout plan qui rencontre l'un d'eux rencontre l'autre, et tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre.*

52. **Théorème.** — *Le lieu des droites parallèles à un plan* P *et menées par un point* A, *pris hors de ce plan, est le plan parallèle au premier mené par ce point.*

En effet, les parallèles au plan P menées par A sont

perpendiculaires à la droite menée par A et perpendiculaire au plan P.

Corollaire. — *Les plans de deux angles ayant leurs côtés respectivement parallèles, sont parallèles.*

Nous avons déjà établi ce théorème [17]; on peut le démontrer en s'appuyant sur le théorème précédent. Les côtés de l'un des angles sont parallèles au plan dans lequel est tracé l'autre ; donc [52] ils sont dans un plan parallèle au premier.

53. Remarque. — Pour construire le plan parallèle à un plan donné P et passant par un point A, il suffit de mener par A deux droites parallèles au plan P.

54. **Théorème.** — *Les intersections de deux plans parallèles par un même plan sont parallèles.*

En effet, les droites d'intersection sont dans un même plan, le plan sécant, et ne peuvent se rencontrer, puisqu'elles appartiennent *tout entières* à deux plans parallèles.

55. **Théorème.** — *Deux plans parallèles interceptent des segments égaux sur deux droites parallèles.*

Soient (fig. 33) AB, CD deux segments de droites

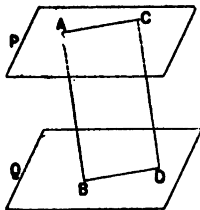


Fig. 33.

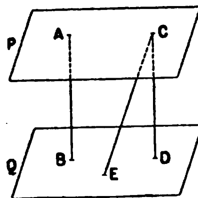


Fig. 34.

parallèles compris entre deux plans parallèles. Les

droites AC, BD sont parallèles [54]; la figure ABDC est donc un parallélogramme et par suite AB = CD.

56. Corollaire. — Si la droite AB (fig. 34) est perpendiculaire à l'un des plans parallèles P ou Q, elle est perpendiculaire à l'autre et il en est de même de CD; la distance AB est alors la distance du point A au plan Q et l'on voit immédiatement que c'est la plus petite distance d'un point quelconque de P à un point quelconque de Q, car CD < CE, donc AB < CE; en remarquant que cette distance est indépendante de la position de A, puisque AB = CD, on peut dire que AB est la *distance* des deux plans parallèles considérés.

57. **Théorème.** — *Trois plans parallèles interceptent sur deux droites quelconques des segments proportionnels.*

Soient (fig. 35) P, Q, R, trois plans parallèles coupant deux droites aux points A, B, C et D, E, F.

Je dis que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

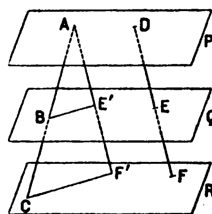


Fig. 35.

En effet, la parallèle à DF menée par A est coupée en E' par le plan Q et en F' par le plan R; les droites BE', CF' sont parallèles [54]; on a donc

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE'}{E'F'}.$$

Mais [55]

$$AE' = DE, \qquad E'F' = EF;$$

la proposition est donc établie.

Il convient de remarquer que les rapports $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ et $\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$ sont égaux en grandeur et signe.

58. Remarque. — Si

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}},$$

on peut mener un plan P par les points A et D, un plan Q par B et E, et un plan R par C et F, de telle sorte que ces trois plans soient parallèles. En d'autres termes, les droites AD, BE, CF sont alors parallèles à un même plan. Il suffit, en effet, de mener AF′ parallèle à DF et de prendre $\overline{AE'} = \overline{DE}$, $\overline{E'F'} = \overline{EF}$. Cela fait on prendra pour plan Q, le plan BE′E, pour R le plan CF′F, et enfin on mènera par A et D un plan parallèle à CF′, il sera parallèle aux deux premiers.

59. Propriété du plan bissecteur d'un dièdre. — Soient (fig. 36) P, Q deux plans, AB leur intersection. Un plan perpendiculaire à AB coupe ces deux plans suivant les droites CD, EF; on obtient ainsi les rectilignes CAF, FAD, DAE, EAC des quatre dièdres formés par les plans P et Q. Si l'on mène les bissectrices GH, KL des quatre angles plans ainsi obtenus, ces droites déterminent avec AB deux plans perpendiculaires, qui partagent en parties égales chacun des dièdres. Ainsi les dièdres HABD et HABF sont égaux. Le lieu des points situés à égale distance des deux plans P et Q se compose des deux *plans bissecteurs* ABGH et ABKL. Soit, en effet, M un point situé à l'intérieur du dièdre DABF, par exemple, et soient MR, MS ses distances aux faces de ce dièdre. Le plan MRS est perpendiculaire à ces faces, donc à leur intersection; il coupe la figure suivant des droites C′D′, E′F′, G′H′, K′L′ respectivement parallèles aux droites CD, EF, GH, KL. Si l'on remarque que MR est perpendiculaire à

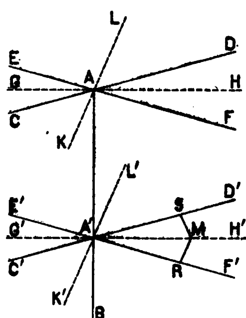


Fig. 36.

E'F' et MS à C'D', on voit que si l'on suppose MR = MS, le point M sera sur la bissectrice de l'angle D'A'F', c'est-à-dire sur la droite A'H' parallèle à AH, et, par conséquent, le point M se trouvera dans le plan bissecteur du dièdre considéré; et réciproquement, s'il est dans ce plan bissecteur, il se trouve sur A'H', il est donc à égale distance de A'F' et de A'D' et, par suite, à égale distance des faces du dièdre.

Donc le lieu des points situés à égale distance de deux plans se compose de deux plans perpendiculaires, qui sont les plans bissecteurs des dièdres formés par ces deux plans.

60. *Deux angles dièdres dont les faces sont parallèles sont égaux ou supplémentaires.*

On coupe la figure par un plan perpendiculaire aux arêtes de ces dièdres, lesquelles sont parallèles (car elles sont parallèles à l'intersection d'une face de l'un des dièdres et de la face non parallèle de l'autre), et l'on est ramené à un théorème de géométrie plane.

61. *Quand on coupe deux plans parallèles par un troisième, on obtient des angles dièdres alternes-internes égaux, etc.*

Même démonstration qu'au numéro précédent.

EXERCICES

1. Si les côtés opposés d'un hexagone gauche sont égaux et parallèles, les milieux de ces côtés sont dans un plan et sont les sommets d'un hexagone dont les côtés opposés sont égaux et parallèles. Réciproque.

2. Dans tout quadrilatère gauche les droites joignant les milieux des côtés opposés et les milieux des diagonales se coupent en parties égales.

3. Étant donnés un quadrilatère gauche et une droite qui partage deux côtés opposés de ce quadrilatère en parties proportionnelles, tracer une deuxième droite, perpendiculaire à la première et qui partage les deux autres côtés en parties proportionnelles.

CHAPITRE VIII

PROJECTIONS ORTHOGONALES

62. Définition. — On appelle *projection orthogonale* d'un point sur un plan (ou simplement *projection*), le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur le plan. Le plan considéré se nomme alors *plan de projection.*

La projection d'une figure est le lieu des projections des points de cette figure.

63. **Théorème.** — *La projection d'une droite sur un plan est une droite, pourvu que la droite ne soit pas perpendiculaire au plan.*

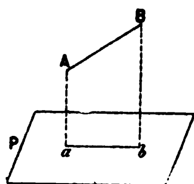


Fig. 37.

En effet, les perpendiculaires abaissées sur un plan P (fig. 37) des différents points d'une droite AB sont toutes dans le plan perpendiculaire au plan P mené par cette droite, et qu'on nomme le *plan projetant* de la droite sur le plan P. Le lieu des projections de la droite AB sur le plan P est donc l'intersection du plan P et du plan projetant.

Si la droite est perpendiculaire au plan P, tous les points de cette droite se projettent sur le plan P en un même point, qui est le pied de cette droite dans le plan. Si la droite est dans le plan de projection, elle coïncide avec sa projection sur ce plan.

Pour avoir la projection d'une droite, il suffit de déterminer les projections de deux de ses points. La projection d'une droite passe par le point où elle rencontre le

plan de projection, point qu'on nomme *la trace* de cette droite. Il suffit donc, quand on connaît la trace d'une droite, de connaître la projection d'un autre point de cette droite, pour connaître la projection de la droite.

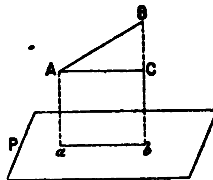


Fig. 38.

Le segment ab (fig. 38) qui a pour extrémités les projections des extrémités A, B d'un segment de droite AB, se nomme la projection de ce segment.

La parallèle à ab menée par A est dans le plan projetant de AB ; elle rencontre donc la projetante Bb en un point C et l'on a

$$AC < AB;$$

or

$$ab = AC;$$

donc

$$ab < AB.$$

Si AB était parallèle au plan P, les points C et B seraient confondus et dans ce cas, on aurait $ab = AB$. Donc,

La projection d'un segment de droite est au plus égale à ce segment.

Il n'y a égalité que si la droite est projetée sur un plan qui lui est parallèle.

64. **Théorème.** — *Les projections orthogonales d'une même figure sur des plans parallèles sont égales.*

Il suffit de remarquer que les projections de trois points quelconques A, B, C de la figure sur deux plans parallèles sont les sommets de deux triangles égaux A′B′C′ et A″B″C″.

65. Théorème. — *Les projections de deux droites parallèles sur un même plan sont parallèles.*

En effet, les plans projetants des deux droites (supposées non perpendiculaires au plan de projection) sont parallèles, car la projetante d'un point de la première droite et la projetante d'un point de la seconde sont parallèles ; les plans projetants sont déterminés par deux couples de droites respectivement parallèles ; les projections des deux droites sont donc les intersections de deux plans parallèles par un même plan.

66. Réciproque. — *Si les projections de deux droites sur deux plans de projections non parallèles sont des droites parallèles, ces droites sont elles-mêmes parallèles.*

En effet, les plans projetants relatifs à un même plan de projection étant parallèles, les intersections de ces quatre plans deux à deux sont parallèles et les droites considérées sont deux de ces quatre intersections.

Remarque. — Une droite n'est pas déterminée par une seule projection, car cette projection est commune à toutes les droites du plan projetant. Soient P et P′ deux plans qui se rencontrent et soient Q un plan perpendiculaire au plan P et Q′ un plan perpendiculaire au plan P′; si Q et Q′ se confondent en un seul plan, ce plan est perpendiculaire à l'intersection des plans P et P′; si Q et Q′ étaient parallèles, chacun d'eux serait perpendiculaire à cette intersection. Une droite est déterminée par ses deux projections, pourvu que ces projections ne soient pas perpendiculaires à l'intersection des deux plans P, P′. Il y a une infinité de droites ayant pour projections sur P et P′ deux droites perpendiculaires en un même point à l'intersection des plans P et P′; ces droites sont dans un plan perpendiculaire à cette intersection. Il n'y a aucune droite dont les projections soient perpendiculaires en deux points différents à l'intersection des plans de projection.

Le théorème précédent n'est vrai que si les projections données ne sont pas perpendiculaires toutes les deux à l'intersection des plans de projection.

67. **Théorème.** — *Les projections de deux droites orthogonales sur un plan parallèle à l'une d'elles sont des droites perpendiculaires. Réciproques.*

Soient (fig. 39), AB, CD deux droites orthogonales, *ab*, *cd* leurs projections sur un plan P parallèle à CD. La droite CD est orthogonale à toute projetante A*a* de la droite AB [24]; elle est donc perpendiculaire au plan projetant de AB et il en est de même de sa projection *cd*, qui lui est parallèle; donc *cd* est perpendiculaire à la droite *ab*.

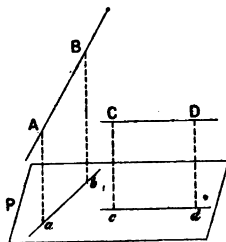


Fig. 39.

Première réciproque. — *Si les projections ab, cd de deux droites* AB, CD *sur un plan* P *parallèle à l'une de ces droites sont perpendiculaires, les droites* AB *et* CD *sont orthogonales.*

En effet, supposons le plan P parallèle à CD; la droite *cd* est perpendiculaire à *ab* par hypothèse, elle est aussi perpendiculaire à A*a*, qui est perpendiculaire au plan P; donc *cd* est perpendiculaire au plan projetant de AB et, par suite, il en est de même de la droite CD, qui lui est parallèle; d'où l'on conclut que CD et AB sont orthogonales.

Seconde réciproque. — *Si* AB *et* CD *sont orthogonales et si leurs projections sur un plan* P *sont perpendiculaires, le plan* P *est parallèle à l'une des deux droites* AB *ou* CD

Supposons en effet que AB ne soit pas parallèle au plan P; la droite *ab* est à elle-même sa projection sur le plan P; les projections de CD et de *ab* sur ce plan étant les droites *cd* et *ab*, perpendiculaires par hypothèse, CD est orthogonale à *ab*; elle est donc orthogonale à deux droites AB, *ab*, non parallèles, et, par suite, elle est perpendiculaire au plan projetant de AB. Il en est de même évidemment de *cd*; les droites CD et *cd* sont donc parallèles et, par conséquent, CD est parallèle au plan P.

Remarque. — Les projections sur un même plan de deux droites parallèles étant parallèles, on peut énoncer autrement le théorème précédent.

1° *La projection d'un angle droit sur un plan parallèle à l'un de ses côtés est un angle droit.*

2° *Si un angle se projette suivant un angle droit sur un plan parallèle à l'un de ses côtés, il est droit lui-même.*

3° *Si un angle droit se projette suivant un angle droit, le plan de projection est parallèle à l'un de ses côtés.*

Il convient d'ajouter que l'on suppose que le plan de projection n'est pas perpendiculaire à l'une des droites considérées.

Remarquons enfin que le théorème précédent ne diffère pas du théorème des trois perpendiculaires. Mais il nous a semblé indispensable de conserver les deux énoncés, chacun d'eux pouvant présenter des avantages suivant les circonstances.

68. **Théorème.** — *Quand une droite* AB *est perpendiculaire à un plan* M, *la projection de cette droite et la trace du plan* M *sur un même plan* P *sont perpendiculaires entre elles.*

Ce théorème n'est qu'un corollaire immédiat du précédent, car la droite AB est orthogonale à l'intersection du plan M et du plan de projection ; donc la projection de AB et la projection de l'intersection des deux plans sur le plan P sont orthogonales ; il n'y a plus qu'à remarquer que l'intersection des plans M et P, c'est-à-dire la trace du plan M, est à elle-même sa projection sur P.

RÉCIPROQUE. — *Si les projections d'une droite* AB *sont respectivement perpendiculaires aux traces d'un plan* P *sur deux plans de projection, la droite* AB *est perpendiculaire au plan* P.

En effet, d'après la première réciproque du théorème 67, la droite est perpendiculaire aux traces du plan P ; elle est donc perpendiculaire à ce plan, pourvu que ces traces ne soient pas parallèles, c'est-à-dire pourvu que le plan P ne soit pas parallèle à l'intersection des deux plans de projection.

ANGLE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

69. **Théorème.** — *L'angle aigu qu'une droite fait avec sa projection sur un plan est le plus petit des angles que cette droite fait avec les droites contenues dans ce plan.*

Soit (fig. 40) AB une droite qui rencontre le plan P au point A, et soit AC sa projection sur ce plan, enfin soit AD une autre droite quelconque menée par A, dans le plan P. Tout revient à démontrer que

$$\widehat{BAC} < \widehat{BAD}.$$

En supposant que C soit la projection du point B, prenons AD = AC et traçons la droite BD. On a BC < BD; les deux triangles ABC, ABD ayant deux côtés égaux chacun à chacun, savoir : AB commun et AD = AC, et le troisième côté inégal, au plus petit côté est opposé le plus petit angle. Donc $\widehat{BAC} < \widehat{BAD}$. C.q.f.d.

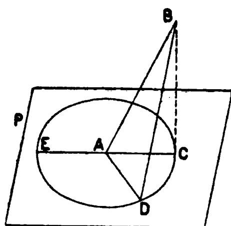


Fig. 40.

L'angle BAC est, par définition, l'*angle de la droite* AB *et du plan* P.

Si l'on fait décrire au point D le cercle de centre A et de rayon AC, l'oblique BD augmente avec l'angle CAD. Donc il en est de même de l'angle BAD; par suite, le maximum de cet angle est l'angle *obtus* BAE que fait la droite AB avec sa projection.

70. Lignes de pente d'un plan. — Soient (fig. 41) P et H deux plans. La perpendiculaire AB menée par un point A du plan P à l'intersection MN de ces deux plans, est celle des droites du plan P, issues de A, qui fait avec le plan H le plus grand angle possible.

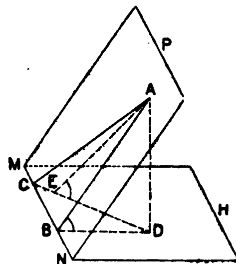


Fig. 41.

Soit en effet AC une autre droite appartenant au plan P, et soit D la projection du point A, il s'agit de prouver que $\widehat{ABD} > \widehat{ACD}$. Remarquons que BD < CD; donc si l'on prend sur DC le segment DE = DB, le point E sera situé entre D et C. Or l'angle $\widehat{AED} = \widehat{ABD}$ et, d'autre part, on sait que $\widehat{AED} > \widehat{ACD}$ donc $\widehat{ABD} > \widehat{ACD}$.

La ligne AB et les lignes parallèles à AB tracées dans le plan P, se nomment les *lignes de pente* du plan P par rapport au plan H.

PROJECTIONS SUR UN AXE

71. On appelle *projection* d'un point A sur un axe X'X (fig. 42), le point d'intersection *a* de cet axe et du plan perpendiculaire mené par le point A.

La projection d'un segment AB est le segment *ab* qui a pour extrémités les projections *a*, *b* des extrémités A, B du segment AB.

Ayant choisi sur X'X le sens des segments positifs, on appelle projection d'une brisée ABCD...KL, la somme algébrique des projections $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$,... $\overline{kl}$ des côtés consécutifs de cette brisée.

72. **Théorème fondamental.** — *La projection sur un axe quelconque d'un contour polygonal fermé est nulle.*

En effet, la projection du contour ABC... KLA est égale à la somme algébrique :

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \ldots + \overline{kl} + \overline{la}$$

et l'on sait que cette somme est nulle.

Corollaire. — De l'égalité

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \ldots + \overline{kl} + \overline{la} = 0,$$

on tire

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \ldots + \overline{kl} = \overline{al} ;$$

c'est-à-dire :

La projection d'une brisée ABC... KL est égale à celle de sa *résultante* AL.

73. **Théorème.** — 1° *Les projections d'un segment sur des axes parallèles sont égales.*

2° *La projection d'un segment a une longueur plus petite que la longueur du segment, sauf quand le segment est parallèle à l'axe; dans ce cas, les longueurs du segment et de la projection sont égales.*

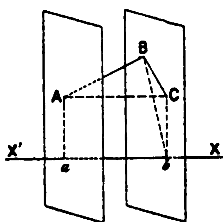


Fig. 42.

Il suffit de remarquer (fig. 42), que la parallèle à l'axe X'X menée par A, rencontrant le plan projetant de B en un point C, on a :

$$ab = AC \text{ et } AC < AB.$$

REMARQUE. — Les droites A*a* et B*b* sont les perpendiculaires abaissées de A et de B sur l'axe X'X. On peut donc définir la projection d'un point le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe. La définition que nous avons adoptée a l'avantage d'être susceptible de généralisation. On peut en effet projeter sur un axe en prenant des plans projetants parallèles à un plan donné. De même, on peut projeter sur un plan, à l'aide de projetantes parallèles à une droite donnée.

PERPENDICULAIRE COMMUNE A DEUX DROITES PLUS COURTE DISTANCE

74. **Théorème.** — 1° *Il existe toujours une droite et une seule qui rencontre deux droites données non situées dans un même plan et qui est perpendiculaire à ces deux droites.*

2° *La distance des pieds de la perpendiculaire com-*

mune à ces deux droites est la plus petite distance d'un point quelconque pris sur l'une d'elles à un point quelconque pris sur l'autre.

1° Soient (fig. 43) AB et CD deux droites non situées dans un même plan. Par un point quelconque de l'espace, on peut mener un plan P, parallèle aux droites données. Si une droite EF rencontre AB et CD et est perpendiculaire à chacune d'elles, cette droite est l'intersection des deux plans perpendiculaires au plan P et menés par chacune des deux droites données. On peut toujours construire ces deux plans; leur intersection est la droite cherchée.

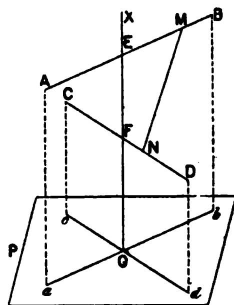


Fig. 43.

On peut remarquer que la droite EF est la perpendiculaire au plan P, menée par le point de rencontre O des projections *ab*, *cd* des deux droites AB, CD, sur le plan P.

2° Soient M un point quelconque de AB et N un point quelconque de CD.

Le segment EF est la projection du segment MN sur la droite indéfinie OX ; on a donc [73] :

$$EF < MN.$$

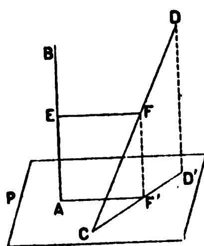


Fig. 44.

75. *La plus courte distance de deux droites est égale à la distance du pied de l'une de ces droites sur un plan perpendiculaire, à la projection de l'autre droite sur ce plan.*

Supposons (fig. 44) le plan P perpendiculaire en A à la droite AB et soit CD′ la projection de CD sur ce plan; soit enfin EF la perpendiculaire commune à ces deux droites. L'angle EFC est droit; l'un

des côtés de cet angle étant perpendiculaire à AB est parallèle au plan P; sa projection sur ce plan est donc un angle droit; ainsi l'angle AF'C est droit et, comme AF' = EF, le théorème est démontré.

EXERCICES

1. La direction de la perpendiculaire commune à deux droites est celle d'une perpendiculaire à un plan parallèle aux deux droites données. En déduire une méthode pour déterminer la perpendiculaire commune à deux droites.

2. Étant données deux droites non situées dans un même plan, si deux points de l'une sont équidistants de l'autre, ils sont aussi équidistants de la perpendiculaire commune et réciproquement.

3. Étant données deux droites orthogonales, calculer la distance d'un point de la première à un point de la seconde, connaissant la plus courte distance des deux droites et les distances de ces points aux pieds de la perpendiculaire commune. Même calcul, quand les droites font un angle quelconque. (La *trigonométrie* est alors nécessaire, sauf dans des cas particuliers.)

4. Si un quadrilatère plan ou gauche a deux côtés opposés égaux : 1° ces deux côtés sont également inclinés sur la médiane des deux autres côtés ; 2° la projection de chacun des premiers côtés, sur la médiane, est égale à la médiane (Neuberg).

CHAPITRE IX

ANGLES POLYÈDRES

76. — On appelle *angle trièdre* (fig. 45), ou simplement *trièdre*, la figure formée par trois demi-droites OA, OB, OC issues d'un même point, mais non situées dans un même plan, et les portions de plan comprises entre ces demi-droites. Le point de départ O des demi-droites se nomme le *sommet* du trièdre ; les demi-droites sont les *arêtes*; les angles AOB, BOC, COA sont les

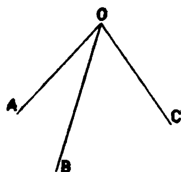


Fig. 45.

faces (*) du trièdre ; enfin les dièdres AOBC, BOCA, COAB sont les *dièdres* du trièdre. Ainsi un trièdre a six éléments : ses trois faces et ses trois dièdres. On désigne un trièdre par quatre lettres, la première étant placée au sommet ; ainsi on dit : le trièdre O.ABC.

Plus généralement, considérons un nombre quelconque de demi-droites issues d'un même point, par exemple (fig. 46), les demi-droites OA, OB, OC, OD, OE, et considérons ces demi-droites dans un ordre déterminé, celui dans lequel nous venons de les ranger, si l'on veut. Nous supposerons que trois demi-droites consécutives ne soient pas dans un même plan (en considérant comme consécutives les droites OD, OE, OA, ainsi que OE, OA, OB).

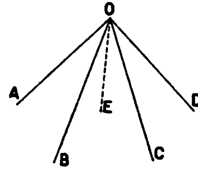


Fig. 46.

La figure formée par ces demi-droites et par les portions de plans comprises entre chaque droite et la suivante et aussi entre la dernière et la première est ce qu'on nomme un *angle polyèdre* (**) ou encore un *angle solide*. On dit l'angle polyèdre O.ABCDE. Le point O est le sommet ; OA, OB, OC, OD, OE sont les *arêtes* ; les *angles* AOB, BOC, COD, DOE, EOA sont les *faces* ; enfin les dièdres AOBC, BOCD,... EOAB sont les *dièdres* de l'angle polyèdre O.ABCDE.

77. On dit qu'un angle polyèdre est *convexe* lorsque le plan de deux arêtes consécutives quelconques est tel que les autres arêtes soient situées d'un même côté de ce plan.

(*) Il faut se rappeler que les faces d'un trièdre sont des angles et non des polygones.

(**) On ne doit pas dire un polyèdre pour un angle polyèdre ; nous verrons dans le chapitre suivant, que le polyèdre est tout autre chose.

Si l'on joint un point quelconque pris hors d'un plan, à tous les sommets d'un polygone convexe situé dans ce plan, on obtient un angle polyèdre convexe; et réciproquement, tout angle polyèdre convexe est coupé par un plan rencontrant toutes les arêtes (et non leurs prolongements) suivant un polygone convexe.

78. *Angles polyèdres égaux; angles polyèdres symétriques.* — On dit que deux angles polyèdres sont égaux quand on peut faire coïncider leurs sommets et leurs arêtes; les faces de l'un sont alors égales aux faces de l'autre et de même pour les dièdres. Mais la réciproque n'est pas vraie; on peut en effet construire, d'une infinité de manières, deux angles polyèdres ayant tous leurs éléments respectivement égaux sans que les angles polyèdres puissent coïncider.

Il suffira de considérer un angle trièdre O.ABC et le trièdre O.A′B′C′ obtenu en prolongeant les arêtes au delà du sommet.

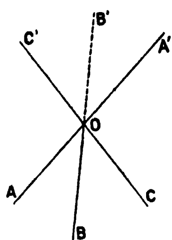


Fig. 47.

Pour fixer les idées, supposons (fig. 47) que l'arête OB soit *en avant* du plan AOC et par suite OB′ en arrière du même plan, ce que nous représentons en figurant OB′ en traits ponctués. Les faces des deux trièdres sont égales comme angles opposés par le sommet; les dièdres sont égaux comme opposés par l'arête; mais on ne peut, en général, faire coïncider ces deux trièdres. En effet, imaginons un observateur couché le long de OB, la tête en O, les pieds en B. Si cet observateur regarde l'angle AOC, il verra OA à sa gauche, OC à sa droite. Le même observateur couché le long de OB′, les pieds en B′, la

tête en O et regardant le plan A′OC′ verrait OA′ à sa droite et OC′ à sa gauche. La disposition des éléments n'est donc pas la même. D'ailleurs, si l'on veut faire coïncider les deux trièdres, il faudrait faire coïncider l'angle AOC avec son égal A′OC′, en faisant coïncider, par exemple, OC′ avec OC. Or on y arrive en faisant tourner le trièdre OA′B′C′ autour de la perpendiculaire au plan AOC menée par O; mais quand OA′ sera venu coïncider avec OA et OC′ avec OC, l'arête OB′ sera restée en arrière du plan AOC; on voit facilement qu'elle prend une position OB″ symétrique de OB par rapport au plan AOC.

On pourrait commencer par faire coïncider OC′ avec OA et OA′ avec OC. Les arêtes OB et OB′ se trouveront alors du même côté du plan AOC; mais le dièdre B′OC′A′ n'est pas égal, en général, au dièdre BOAC, de sorte que le plan B′OC′ ne coïncide pas avec le plan AOB, et par suite OB′ ne coïncide pas avec OB. Cependant, si les dièdres BOAC et B′OC′A′ sont égaux, le plan B′OC′ coïncidera avec le plan BOA et le plan B′OA′ avec le plan BOC et, par suite, OB′ coïncidera avec OB. On voit ainsi, en passant, que si un trièdre a deux dièdres égaux, les faces opposées à ces dièdres sont égales. Si on laisse ce cas de côté, on voit que les deux trièdres O.ABC et O.A′B′C′ ne peuvent coïncider.

Il résulte de ce qui précède que deux angles polyèdres ayant même sommet et tels que les arêtes de l'un soient les prolongements des arêtes de l'autre, ne peuvent coïncider en général, car les trièdres formés par trois arêtes du premier angle polyèdre et les prolongements de ces arêtes ne sont pas superposables. On donne aux angles polyèdres en question, le nom d'angles *polyèdres symé-*

triques. On verra plus loin la raison de cette dénomination.

TRIÈDRES SUPPLÉMENTAIRES

79. Considérons (fig. 48) un plan P et la perpendiculaire AOA′ à ce plan ; menons par le pied O de cette perpendiculaire une demi-droite OB. Si OB et OA sont d'un même côté du plan P, l'angle AOB est aigu et l'angle A′OB est obtus; et réciproquement, si l'angle AOB est aigu, OB et OA sont d'un même côté du plan. On le voit nettement en considérant la demi-droite OC, intersection du demi-plan AA′B et du plan P ; dire en effet que OA et OB sont d'un même côté par rapport au plan P, revient à dire que OB est à l'intérieur de l'angle AOC.

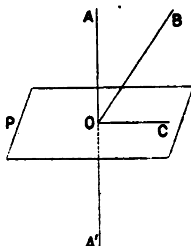


Fig. 48.

80. Cela posé, considérons un angle dièdre CABD (fig. 49, 50) et, par un point A de son arête, menons la demi-

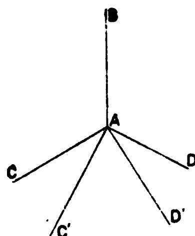


Fig. 49.

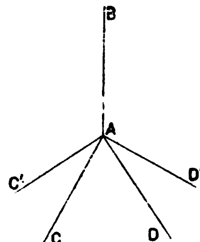


Fig. 50.

droite AC′ perpendiculaire à la face BAD et située du côté de la face BAC, et la demi-droite AD′ perpendiculaire à la face BAC et du côté de la face BAD. Je dis que

l'angle plan C′AD′ est le supplément du rectiligne CAD. On voit d'abord que, si le dièdre est droit, l'angle C′AD′ coïncide avec CAD.

En vertu de la construction, les angles $\widehat{C'AD}$ et $\widehat{CAD'}$ sont droits et de même sens; on en déduit immédiatement :

$$\widehat{CAD} + \widehat{C'AD'} = \widehat{CAD'} + \widehat{C'AD} = 2\,\text{dr}.$$

On dit alors que l'*angle plan* C′AD′ est le *supplément du dièdre* CABD.

81. Ce lemme établi, nous arrivons à la définition des trièdres supplémentaires.

Soit (fig. 51) O.ABC un trièdre quelconque; menons la demi-droite OA′ perpendiculaire au plan de la face BOC, et du même côté que OA, c'est-à-dire telle que l'angle AOA′ soit aigu ; de même, soit OB′ la demi-droite perpendiculaire au plan AOC et faisant avec OB un angle aigu, et enfin la demi-droite OC′, perpendiculaire au plan AOB et faisant avec OC un angle aigu. On obtient ainsi un second trièdre O.A′B′C′. Je dis que, réciproquement, on peut, en partant du second trièdre, obtenir le premier par la même construction. En effet, OB′ étant perpendiculaire au plan AOC, est perpendiculaire à OA ; de même, OC′ est perpendiculaire à OA ; par suite, OA étant perpendiculaire à OB′ et à OC′, est perpendiculaire au plan OB′C′; et d'autre part l'angle A′OA étant aigu, OA est situé du côté de OA′ par rapport au plan B′OC′. Et de même pour les autres arêtes.

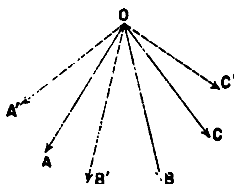


Fig. 51.

Il convient de remarquer que, si les trois droites OA,

OB, OC étaient dans un même plan, les droites OA′, OB′, OC′ coïncideraient; de même, si OA′, OB′, OC′ étaient dans un même plan, à leur tour les trois premières droites coïncideraient. On en conclut que si un trièdre existe, le trièdre supplémentaire existe aussi.

Soient a, b, c, A, B, C les faces et les dièdres du premier trièdre, et soient a', b', c', A′, B′, C′ les faces et les dièdres du second; ces angles étant rapportés à l'angle *droit* pris pour unité.

En vertu du lemme précédent, les faces du premier trièdre sont les suppléments des dièdres du second; on a donc :

$$a' = 2 - A, \quad b' = 2 - B, \quad c' = 2 - C;$$

et de même

$$a = 2 - A', \quad b = 2 - B', \quad c = 2 - C'.$$

Remarques. — I. — Si, au lieu de considérer les dièdres d'un trièdre, on considère leurs suppléments, c'est-à-dire les angles analogues aux angles extérieurs des triangles, en faisant

$$A_1 = 2 - A, \quad B_1 = 2 - B, \quad C_1 = 2 - C,$$
$$A'_1 = 2 - A', \quad B'_1 = 2 - B', \quad C'_1 = 2 - C',$$

les relations entre les éléments des deux trièdres supplémentaires deviennent :

$$a = A'_1, \quad b = B'_1, \quad c = C'_1,$$
$$a' = A_1, \quad b' = B_1, \quad c' = C_1.$$

II. Soient O. ABC, un trièdre, et O. A′ B′ C′, le trièdre supplémentaire ; si nous remplaçons la demi-droite OA′ par la demi-droite opposée OA″, nous aurons un nouveau trièdre O. A″ B′ C′, dont les faces a'', b'', c'' et les dièdres A″, B″, C″ auront pour valeurs :

$$a'' = a' = A_1, \quad b'' = 2 - b' = B, \quad c'' = 2 - c' = C,$$
$$A'' = A' = 2 - a, \quad B'' = 2 - B' = b, \quad C'' = 2 - C' = c.$$

82. Il résulte de ce qui précède qu'à toute relation entre les faces et les dièdres d'un angle trièdre quelconque correspondra une nouvelle relation que l'on obtiendra en écrivant pour l'angle trièdre supplémentaire la relation trouvée, ce qui revient à remplacer dans la première relation les faces par les suppléments des dièdres et les dièdres par les suppléments des faces. Pour plus de netteté, supposons qu'on ait dans un trièdre quelconque :

$$f(a, b, c, A, B, C) = 0;$$

on aura aussi

$$f(2 - A, 2 - B, 2 - C, 2 - a, 2 - b, 2 - c) = 0,$$

puisque

$$f(a', b', c', A', B', C') = 0.$$

Ainsi, à chaque théorème correspond un théorème *corrélatif*.

83. Remarque. — Pour construire le trièdre supplémentaire d'un trièdre donné, il n'est pas nécessaire de mener les demi-perpendiculaires aux faces de ce trièdre par son sommet; on peut les mener par un point quelconque, pourvu que l'on choisisse pour chaque demi-perpendiculaire le même sens que dans le premier cas.

Cela étant, dire que trois plans forment un trièdre, cela revient à dire que ces trois plans n'ont qu'un seul point commun. Or, si un trièdre existe, le trièdre supplémentaire existe aussi; ce qui revient à dire que ses arêtes ne sont pas dans un même plan et réciproquement. On peut donc énoncer cette conclusion qui nous sera utile dans la suite :

Pour que trois plans aient un seul point commun, il faut et il suffit que les perpendiculaires abaissées d'un même point sur ces trois plans ne soient pas dans un même plan.

84. **Théorème.** — *Dans tout trièdre, une face quel-*

conque est plus petite que la somme des deux autres et plus grande que leur différence.

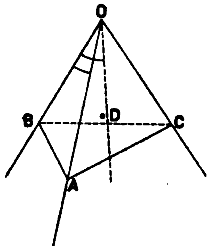


Fig. 52.

Le théorème est évident si les trois faces sont égales. Supposons que la face BOC (fig. 52) soit la plus grande; ce théorème est encore évident pour chacune des deux autres faces; il suffit donc de prouver que

$$\widehat{BOC} < \widehat{BOA} + \widehat{AOC}.$$

Pour cela, traçons dans le plan de la plus grande face, et à l'intérieur de cette face, la demi-droite OD telle que $\widehat{BOD} = \widehat{BOA}$; cela fait, traçons une transversale BCD rencontrant les trois demi-droites OB, OC, OD, et enfin, prenons OA = OD, et tirons les droites AB, AC. Les deux triangles BOA, BOD sont égaux, comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, donc BA = BD. Dans le triangle BAC, le côté AC est plus grand que DC, qui est la différence des deux autres côtés; les deux triangles AOC, COD ont donc deux côtés égaux et le troisième inégal, et par suite

$$\widehat{DOC} < \widehat{AOC};$$

donc

$$\widehat{BOD} + \widehat{DOC} < \widehat{BOA} + \widehat{AOC},$$

ou

$$\widehat{BOC} < \widehat{BOA} + \widehat{AOC}. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Chaque face étant plus petite que la somme des deux autres, en supposant

$$a \geqq b \geqq c,$$

on a

$$a < b + c, \quad \text{d'où} \quad b > a - c, \quad c > a - b,$$
$$b < a + c, \quad \text{d'où} \quad a > b - c.$$

85. **Théorème corrélatif.** — *Dans tout trièdre, la somme de deux dièdres est moindre que le troisième augmenté de deux droits.*

En effet, on a, dans le trièdre supplémentaire :

$$a' < b' + c',$$

c'est-à-dire

$$2 - A < 2 - B + 2 - C,$$

ou

$$B + C < 2 + A.$$

Autre énoncé. — Si l'on envisage les dièdres extérieurs A_1, B_1, C_1, on a :

$$A_1 < B_1 + C_1;$$

donc *chaque dièdre extérieur est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.*

Remarque. — Si l'on suppose $B > C$, on a aussi

$$2 - A > B - C,$$

car

$$a' > c' - b';$$

d'ailleurs cela revient à dire que

$$A_1 > C_1 - B_1.$$

86. **Théorème.** — *Dans tout angle polyèdre convexe, la somme des faces est plus petite que quatre droits.*

En effet, soit (fig. 53) O.ABCDE un angle polyèdre convexe ; si nous imaginons un plan qui coupe toutes les arêtes, la section obtenue ABCDE sera un polygone convexe. Soit O′ un point quelconque pris à l'intérieur de ce polygone ; si nous considérons les triangles ayant pour sommets communs le point O et pour bases les côtés du polygone ABCDE, et en second lieu les triangles ayant pour sommet commun le point O′ et pour bases les côtés du même polygone, les triangles des deux catégories étant en même nombre, la somme des angles intérieurs est la même pour chaque catégorie. Donc, si l'on appelle S la somme des faces de l'angle polyèdre, B la somme des angles à la base des triangles ayant le sommet en O, et de même S′ et B′ les sommes analogues relatives aux triangles ayant leur sommet en O′, on a

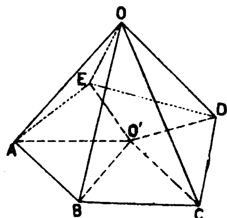


Fig. 53.

(1) $$S + B = S' + B'.$$

Mais dans les trièdres

A.BOE, B.AOC, etc.

on a :

$$EAB < EAO + OAB$$
$$ABC < ABO + OBC$$
$$BCD < BCO + OCD$$
. . . .

c'est-à-dire, en ajoutant membre à membre :

(2) $$B' < B.$$

Si l'on compare l'inégalité (2) à l'égalité (1), on voit que, *par compensation*, on doit avoir

$$S < S',$$

c'est-à-dire :

$$S < 4^d. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

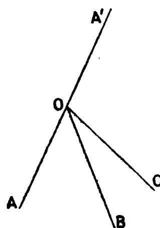


Fig. 54.

Remarque. — Dans le cas d'un trièdre, on peut donner une démonstration plus simple. Considérons (fig. 54) le trièdre O.A'BC obtenu en prolongeant la demi-droite AO au delà du sommet O. On a

$$\text{BOC} < \text{BOA}' + \text{COA}',$$

ou

$$\text{BOC} < 2^d - \text{AOB} + 2^d - \text{AOC},$$

c'est-à-dire

$$\text{AOB} + \text{AOC} + \text{BOC} < 4^d.$$

87. ***Théorème corrélatif.*** — *Dans tout trièdre, la somme des dièdres est comprise entre 2 droits et 6 droits.*

En effet, dans le trièdre supplémentaire du trièdre O. ABC, on a

$$0 < a' + b' + c' < 4,$$

ou

$$0 < 2 - A + 2 - B + 2 - C < 4,$$

c'est-à-dire

$$2 < A + B + C < 6.$$

D'ailleurs chacun des angles A, B, C étant moindres que 2 droits, leur somme est évidemment moindre que 6 droits.

ÉGALITÉ DES TRIÈDRES

88. *Deux angles trièdres sont égaux quand ils ont :*

1° *Une face égale comprise entre deux dièdres égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre ;*

Ou 2° *un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune et disposées dans le même ordre ;*

Ou 3° *les faces égales chacune à chacune et disposées dans le même ordre ;*

Ou enfin 4° *les dièdres égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre.*

Les deux premiers cas d'égalité se démontrent, en employant la méthode de superposition, absolument comme les cas analogues d'égalité de deux triangles ; d'ailleurs ces deux cas sont corrélatifs.

Pour démontrer le troisième cas, nous procéderons encore comme pour les triangles. Soient (fig. 55) O.ABC et O'.A'B'C' deux trièdres dans lesquels on suppose

$$\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'},\quad \widehat{BOC} = \widehat{B'O'C'},\quad \widehat{COA} = \widehat{C'O'A'}.$$

Prenons sur les arêtes du premier trois longueurs arbitraires OA, OB, OC et, sur le second, des longueurs égales O'A' = OA, O'B' = OB, O'C' = OC ; tirons enfin les droites AB, BC, CA ; A'B', B'C', C'A'. Les triangles AOB et A'O'B' sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux; donc AB = A'B'. Pareillement, BC = B'C', AC = A'C', de telle sorte que les triangles ABC, A'B'C' sont égaux ; si nous les faisons coïncider, je dis que O' viendra coïncider avec O, pourvu que la disposition des éléments soit la même dans les deux trièdres. En effet, soit O'' la position que prendra O' ; on aura, en vertu des hypothèses, AO = AO'', BO = BO'', CO = CO''. Donc, si O'' ne coïncidait pas avec O, le plan ABC serait perpendiculaire au milieu de OO'' et, par

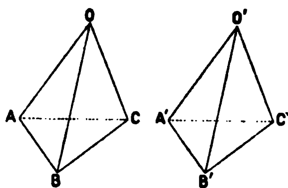


Fig. 55.

suite, O″ serait symétrique de O par rapport au plan ABC ; cela est impossible si l'on suppose les éléments disposés dans le même ordre dans les deux trièdres. Donc O″ coïncide avec O et, par suite, les deux trièdres coïncident.

Pour démontrer le quatrième cas, on remarque que si les dièdres de deux trièdres sont égaux chacun à chacun, les trièdres supplémentaires auront leurs faces égales chacune à chacune ; donc les dièdres de ces derniers seront aussi égaux et, par suite, les faces des trièdres primitifs seront égales chacune à chacune, et l'on est ainsi ramené au troisième cas.

89. Remarque. — Soient (fig. 56) O. ABC et O′. A′B′C′ deux trièdres ayant, par exemple, leurs faces respectivement égales, mais non disposées dans le même ordre, soient :

$$\widehat{BOC} = \widehat{B'O'C'}, \quad \widehat{COA} = \widehat{C'O'A'}, \quad \widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}.$$

Mais supposons qu'un observateur placé en DE, le long de OA, la tête du côté de O et les pieds du côté de A et regardant le plan BOC, voie OB à sa gauche, OC à sa droite et qu'un observateur couché sur O′A′, les pieds en E′, la tête en D′, voie au contraire O′B′ à sa droite et O′C′ à sa gauche. Il est évident que les deux trièdres ne peuvent coïncider; mais si l'on considère le trièdre O′. A″B″C″ symétrique du second, la disposition des éléments sera la même que dans le premier. On peut donc énoncer ce théorème :

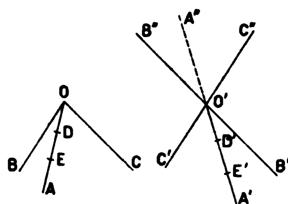


Fig. 56.

Si deux trièdres ont une face égale comprise entre deux dièdres égaux chacun à chacun, ou un dièdre égal compris entre deux faces égales chacune à chacune, ou les trois faces égales chacune à chacune, ou les trois dièdres égaux chacun à chacun, ils sont

égaux ou symétriques, et les trois autres éléments sont aussi égaux chacun à chacun, les dièdres égaux étant opposés aux faces égales et réciproquement.

On peut remarquer en particulier que le raisonnement que nous avons fait pour le troisième cas d'égalité prouve que O'. A'B'C' coïncide avec O. ABC ou avec le trièdre ayant pour sommet le point symétrique de O par rapport au plan ABC et dont les arêtes passent par les points A, B, C.

90. ANALOGIES ET DIFFÉRENCES ENTRE LA THÉORIE DES TRIÈDRES ET CELLE DES TRIANGLES. — Le lecteur a dû remarquer déjà lui-même quelque analogie entre les deux théories et reconnaître que les faces d'un trièdre jouent le même rôle que les côtés d'un triangle et les dièdres, celui des angles. On peut en effet faire le tableau comparatif suivant :

TRIANGLES	TRIÈDRES
Dans un triangle :	Dans un trièdre :
1° Un *côté* quelconque est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence ;	1° Une *face* quelconque est plus petite que la somme des deux autres et plus grande que leur différence ;
2° A deux *côtés* égaux sont opposés deux *angles* égaux, et réciproquement ;	2° A deux *faces* égales sont opposés deux *dièdres* égaux, et réciproquement ;
3° Si deux *côtés* sont inégaux au plus grand est opposé le plus grand *angle*.	3° Si deux *faces* sont inégales, à la plus grande est opposé le plus grand *dièdre*.
Si deux triangles ont un *angle* inégal compris entre *côtés* égaux, chacun à chacun, au plus grand angle est opposé le plus grand côté.	Si deux trièdres ont un *dièdre* inégal compris entre *faces* égales, chacune à chacune, au plus grand *dièdre* est opposée la plus grande face.

Mais il y a aussi de profondes différences entre les deux théories ; en voici quelques exemples :

La somme des angles intérieurs d'un triangle est égale à deux droits.	La somme des dièdres intérieurs d'un trièdre est *comprise* entre deux droits et six droits.

Dans tout triangle, un angle extérieur est égal à la somme des deux angles intérieurs non adjacents.	Dans tout trièdre, un dièdre extérieur est plus petit que la somme des dièdres intérieurs non adjacents.
Chaque côté d'un triangle est aussi grand qu'on veut.	Chaque face d'un trièdre est moindre que deux droits.
La somme des côtés d'un triangle n'est assujettie à aucune condition.	La somme des faces d'un trièdre est moindre que quatre droits.

On trouvera encore d'autres différences dans les cas d'égalité.

Deux trièdres qui ont les dièdres égaux chacun à chacun et disposés dans le même ordre, sont égaux, tandis que deux triangles qui ont les angles égaux sont seulement semblables.

Remarquons enfin que, si deux triangles ont, par exemple, un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, ils sont égaux, tandis que deux trièdres qui ont un dièdre égal compris entre faces égales, chacune à chacune, peuvent être seulement symétriques et non égaux. Mais ici, il y aurait plutôt lieu de voir une analogie et non une différence, si l'on veut bien distinguer deux sortes d'égalité dans un même plan [G. P. 59]. En effet, deux triangles situés dans un même plan et ayant par exemple les trois côtés égaux ne peuvent être amenés à coïncider sans retournement de l'un d'eux, que si les éléments des deux triangles sont orientés de la même façon, ils sont alors directement égaux; dans le cas contraire, s'il faut au préalable retourner l'un d'eux, c'est-à-dire si l'orientation des éléments n'est pas la même dans les deux triangles, on dit qu'ils sont inversement égaux. On peut d'après cela rapprocher les énoncés des théorèmes relatifs aux triangles ou aux trièdres. Ainsi, par exemple :

Deux triangles ayant les trois côtés égaux, chacun à chacun, sont directement ou inversement égaux.	Deux trièdres ayant les trois faces égales, chacune à chacune, sont égaux, ou symétriques.

Ajoutons enfin que : aux côtés égaux correspondent des angles égaux, dans les deux triangles, et aux faces égales correspondent des dièdres égaux, dans les deux trièdres.

91. PROBLÈME. — *Construire un trièdre dont on donne les trois faces.*

Soient a, b, c, les trois angles donnés. Il est évident *a priori* que le problème n'est possible que si chaque face est plus petite que la somme des deux autres et qu'en outre la somme des trois faces soit moindre que quatre droits. Nous allons prouver que ces deux conditions nécessaires sont suffisantes. En effet, supposons, pour fixer les idées,

$$a \geqq b \geqq c$$

et

$$a < b + c, \qquad a + b + c < 4^d.$$

D'un point quelconque O (fig. 57), situé dans un plan donné, traçons un cercle de rayon arbitraire et construisons les angles au centre consécutifs A_1OB, BOC, COA_2, respectivement égaux à c, a, b. Prenons sur l'arc BC, l'arc $BA' = BA_1$ et l'arc $CA'' = CA_2$.

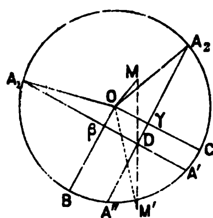


Fig. 57.

A cause de l'hypothèse $a < b + c$, le point A'' est entre B et A'; d'autre part l'arc A_1BCA_2 est moindre que la circonférence tout entière, d'où il résulte que A'' et A_2 sont de part et d'autre de la corde $A'A_1$; par suite, les cordes $A'A_1$ et $A''A_2$ se coupent en un point D, situé *à l'intérieur du cercle*. Je dis que les cercles décrits sur $A'A_1$, et $A''A_2$ comme diamètres, dans des plans perpendiculaires au plan P du premier cercle, ont deux points communs ; en effet, $A_1D \times DA' = A_2D \times DA''$; donc, si l'on élève en D la perpendiculaire au plan P et que l'on prenne $DM = DM' = \sqrt{A_1D.DA'}$, les points M et M' appartiendront aux deux cercles considérés. Cela posé, si l'on fait tourner la droite OA_1 autour de OB, le point A_1 décrira un cercle ayant pour centre le milieu β de A_1A' et dont le plan sera perpendiculaire au plan P. Ce cercle passera donc par M et par M'. Pareillement, si l'on fait tourner la droite OA_2 autour de OC, le point A_2 décrira un cercle passant par les deux mêmes points M

et M′; il en résulte que l'angle BOM $= c$ et l'angle COM $= b$. Les deux trièdres symétriques O.MBC et O.M′BC répondent à la question. La construction elle-même prouve qu'il ne peut y en avoir d'autres, ce qu'on savait d'ailleurs, puisque deux trièdres ayant les faces égales chacune à chacune, sont égaux ou symétriques.

92. Problème corrélatif. — *Construire un trièdre dont on donne les trois dièdres.*

Soient A, B, C, les trois dièdres donnés supposés moindres que deux droits; ils doivent satisfaire aux conditions suivantes : 1° chaque dièdre augmenté de deux droits doit être supérieur à la somme des deux autres, et 2° la somme $A + B + C$ doit être comprise entre 2 droits et 6 droits.

Ces conditions sont nécessaires; je dis qu'elles sont suffisantes. En effet, si elles sont remplies, on peut construire un trièdre auxiliaire ayant pour faces $a' = 2 - A$, $b' = 2 - B$, $c' = 2 - C$, car chacune des faces a', b', c' sera positive et moindre que deux droits ; chacune sera moindre que la somme des deux autres ; ainsi

$$a' < b' + c', \qquad \text{car} \qquad 2 - A < 2 - B + 2 - C,$$

puisqu'on suppose $B + C < 2 + A$; et enfin

$$a' + b' + c' < 4,$$

puisque

$$2 - a' + 2 - b' + 2 - c' > 2.$$

Cela étant, les trièdres supplémentaires des deux trièdres obtenus répondent à la question. Si la disposition des éléments est donnée d'avance, une seule solution conviendra.

93. Remarque. — Nous venons ainsi de prouver que les inégalités

$$0 < a + b + c < 4$$

et

$$2 < A + B + C < 6$$

donnent les *limites précises* entre lesquelles sont comprises les deux sommes $a+b+c$ et $A+B+C$. En effet, soit α un angle aussi petit qu'on veut, on peut trouver, d'une infinité de manières trois angles a, b, c, tels que

$$a+b+c<\alpha$$

et

$$a<b+c,$$

en supposant $a \geqq b \geqq c$; on pourra donc construire une infinité de trièdres dont la somme des faces soit aussi petite qu'on voudra, et de même on pourra en construire une infinité tels que la somme $a+b+c$ soit comprise entre 4 dr. $-\alpha$ et 4 droits. Même raisonnement pour les dièdres.

EXERCICES

1. Dans tout trièdre la somme des angles que chaque arête fait avec la face opposée est moindre que la somme des faces (égale à cette somme dans le trièdre trirectangle).

2. Dans tout trièdre :

1° Les plans bissecteurs des dièdres se rencontrent suivant une ligne droite dont les points sont équidistants des plans des faces.

2° Deux plans bissecteurs de deux dièdres extérieurs et le plan bissecteur du troisième dièdre se coupent suivant une droite. Conclure de ces deux propriétés le lieu complet des points équidistants des plans des faces.

3° Les plans menés par les arêtes et perpendiculaires aux faces opposées ont une droite commune.

4° Les plans menés par les bissectrices des faces et respectivement perpendiculaires aux plans de ces faces ont une droite commune dont les points sont équidistants des arêtes.

5° Les plans menés par les bissectrices extérieures de deux faces et la bissectrice intérieure de la troisième face, ces plans étant en outre respectivement perpendiculaires aux plans de ces faces, ont une droite commune.

Lieu des points équidistants des arêtes du trièdre.

6° Les plans menés par les arêtes et les bissectrices des faces opposées ont une droite commune.

7° Les plans menés par les arêtes et les bissectrices extérieures de deux des faces opposées à ces arêtes et la bissectrice intérieure de la troisième face ont une droite commune.

Remarque. — Examiner ce qui arrive quand le trièdre dégénère en un système de trois droites parallèles.

3. Dans un trièdre OABC, la face BOC vaut 90° et chacune des deux autres faces vaut 60°. On porte sur OA une longueur arbitraire et sur les deux autres arêtes on prend des longueurs OB, OC égales au plus grand segment de OA divisé en moyenne et extrême raison. Prouver que le triangle ABC est rectangle.

4. En coupant un trièdre trirectangle par un plan qui rencontre les trois arêtes, on obtient un triangle dont l'orthocentre est la projection du sommet sur le plan sécant.

5. Un plan coupe les arêtes d'un trièdre trirectangle de sommet O aux points A, B, C :

1° En appelant *a*, *b*, *c* les longueurs OA, OB, OC respectivement et *h* la distance du sommet au plan sécant, on a

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

2° D étant le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur le plan ABC, l'aire du triangle OAB est moyenne proportionnelle entre les aires des triangles DAB et ABC.

3° On a entre les aires des triangles OAB, OBC, OCA, ABC, la relation

$$\overline{ABC}^2 = \overline{OAB}^2 + \overline{OBC}^2 + \overline{OCA}^2.$$

6. Mener par un point donné une droite faisant des angles égaux avec trois droites données ou avec trois plans donnés.

— On considérera le trièdre formé par les droites parallèles aux droites données et menées par un point quelconque, ou le trièdre formé par les plans donnés.

7. Mener par un point donné un plan qui fasse des angles égaux avec trois droites données ou avec trois plans donnés.

8. Couper un angle tétraèdre convexe de façon que la section soit un parallélogramme.

9. Soient M, N, P, Q les projections d'un point O sur les côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrilatère ABCD, plan ou gauche, on a :

$$(1) \quad \overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 + \overline{NB}^2 - \overline{NC}^2 + \overline{PC}^2 - \overline{PD}^2 + \overline{QD}^2 - \overline{QA}^2 = 0,$$

car $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OB}^2$, etc.

Réciproquement, si quatre points M, N, P, Q situés respectivement sur les côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrilatère *gauche* ABCD, ou sur leurs prolongements, vérifient la relation (1), les

plans perpendiculaires aux côtés menés par ces quatre points ont un point commun, et un seul. Car les trois premiers plans se coupent [83] en un point O et, si Q′ est la projection de ce point sur DA, on a

$$\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 + \overline{NB}^2 - \overline{NC}^2 + \overline{PC}^2 - \overline{PD}^2 + \overline{Q'D}^2 - \overline{Q'A}^2 = 0\,;$$

d'où, en comparant avec l'hypothèse,

$$\overline{QD}^2 - \overline{QA}^2 = \overline{Q'D}^2 - \overline{Q'A}^2\,;$$

ce qui prouve que Q et Q′ coïncident.

10. On donne trois droites (A), (B), (C). On mène un plan Π perpendiculaire à (A) ; soient P, Q, R les points où ce plan rencontre respectivement les droites (A), (B), (C). Soient Q′ le point où la droite (A) est rencontrée par le plan perpendiculaire à (C) mené par le point Q et R′ le point où la même droite (A) est rencontrée par le plan perpendiculaire à (B) menée par le point R. Démontrer que la longueur du segment Q′R′ reste constante quand le plan Π se déplace parallèlement à lui-même. Existe-t-il un plan coupant les trois droites (A), (B), (C) en des points A, B, C tels que les droites BC, CA, AB soient respectivement orthogonales aux droites (A), (B), (C) ?

S'il existe un pareil plan, il en existe une infinité.

Existe-t-il un point M tel que, si l'on désigne par M′ son symétrique par rapport à la droite (A) et par M″ le symétrique de M′ par rapport à la droite (B), les points M et M″ soient symétriques par rapport à la droite (C) ?

S'il existe un tel point M, il en existe une infinité. Quel est alors leur lieu ? Examiner le cas particulier où les trois droites (A), (B), (C) ont un point commun et le cas plus particulier encore où elles forment un trièdre trirectangle.

Dans le cas particulier où les droites (A), (B) ont un point commun O et où la droite (C) est perpendiculaire au plan de ces deux droites sans passer au point O, on déterminera le lieu des pieds des hauteurs du triangle ABC et le lieu du point de rencontre de ces hauteurs. L'un des pieds est fixe.

(Concours général, Math. élém., 1897. J. Tannery. Voir B. M. E., 1er octobre 1897.)

[illegible]TION

[illegible] placement d'une [illegible] espace, de façon [illegible] ions de droites [illegible] sens et égales. [illegible] t possible, sans [illegible] XY une droite [illegible]

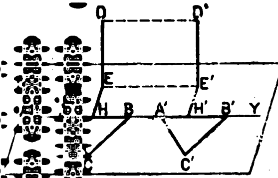


Fig. 58.

[illegible] plan P. Dépla- [illegible] A et B glissent [illegible] isse sur le plan P [illegible] point quelconque [illegible] ; abaissons DE [illegible] perpendiculaire [illegible] H comme faisant [illegible] se déplace de la [illegible] roite XY, dans le [illegible] un chemin HH' [illegible] oite EH, qui fait [illegible] le plan P, sans [illegible] st-à-dire à XY, [illegible] point E décrit

une portion de droite EE′ égale et parallèle à HH′ et de même sens. Enfin, la droite DE reste perpendiculaire au plan ABCE, c'est-à-dire au plan P, et ne change pas de longueur ; donc le point D décrit une portion de droite DD′ égale et parallèle à EE′, ou à AA′, et de même sens. (C. q. f. d.)

On démontre, comme en géométrie plane, qu'on peut remplacer plusieurs translations successives par une translation unique.

ROTATION

95. On appelle *rotation* le déplacement d'une figure indéformable qui se meut dans l'espace de façon que deux de ses points, X et Y (fig. 59), restent fixes; alors, la droite XY tout entière reste fixe ; on dit que la figure *tourne* autour de cette droite, que l'on appelle l'*axe* de la rotation.

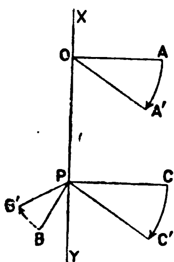


Fig. 59.

Soit A un point quelconque de la figure ; abaissons AO perpendiculaire sur l'axe XY. Quand la figure tourne autour de XY, la droite OA ne cesse pas d'être perpendiculaire à XY ; donc [22] elle reste dans le plan perpendiculaire à XY au point O, et, dans ce plan, le point A décrit un arc de cercle ayant O pour centre. Ainsi,

Tous les points de la figure décrivent des arcs de cercles ayant pour axe l'axe de la rotation.

En outre, *tous les points tournent du même angle et dans le même sens.*

En effet, soient A et B deux points de la figure que

... AO et BP per-
... par P une por-
... même sens, et
... comme apparte-
... avec elle. Quand
... droites OA, PC
... égaux et de même
... restent dans le
... , dans ce plan,
... C′, BPB′ égaux
... OA′, BPB′ sont

... plane, dans son
... 7], est en réalité
... plan, menée par

... *position d'une figure*
... *minée par celle de*
... *ne soient pas en*
... a figure, elle ne
... ces deux points,
... on en ligne droite
... bouger.
... figure indéfor-
... que trois points
... , restent dans un
... position à une
... our d'un axe per-
... on parallèle à ce
... ane, que, dans le
... position à une
...

... e figure indéfor-
... parallèles et de

translations perpendiculaires à ces axes, on peut l'amener directement de la première position à la dernière, soit par une rotation unique, soit par une simple translation. Car, si l'on considère trois points non en ligne droite de la figure dans sa position primitive, appartenant à un plan fixe perpendiculaire aux axes des rotations, ces trois points ne sortiront pas de ce plan.

EXERCICES

1. Pour que le déplacement d'une figure indéformable soit une translation, il faut et il suffit que trois points de cette figure, non en ligne droite, décrivent des droites parallèles.

2. Pour que le déplacement d'une figure indéformable soit une rotation, il faut et il suffit que trois points de cette figure, non en ligne droite, décrivent des arcs de cercles de même axe.

3. Étant donnés deux segments égaux, prouver qu'on peut les amener à coïncider au moyen d'une rotation, et trouver l'axe de cette rotation.

Même question pour deux demi-droites et pour deux demi-plans.

4. Trouver le lieu des axes des rotations qui amènent un plan donné sur un autre plan donné.

LIVRE VI

POLYÈDRES

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS SUR LES POLYÈDRES

97. On appelle *polyèdre* ou *solide* une figure limitée de toutes parts par des portions de plans qu'on appelle les *faces* du polyèdre. Toutes ces faces, limitées chacune par les intersections de leur plan avec les plans des faces contiguës, sont des polygones. Les côtés de ces polygones sont les *arêtes* et leurs sommets sont les *sommets* du polyèdre. Les angles solides formés par les faces qui ont un sommet commun sont les *angles solides* du polyèdre. Enfin, les *diagonales* du polyèdre sont les droites qui joignent deux sommets non situés sur une même face.

On dit qu'un polyèdre est *convexe* lorsqu'il est situé tout entier du même côté du plan de chacune de ses faces.

Le nombre des faces d'un polyèdre est au moins égal à 4.

On appelle *tétraèdre* un polyèdre de 4 faces ;

—	*hexaèdre*	—	6	—
—	*octaèdre*	—	8	—
—	*dodécaèdre*	—	12	—
—	*icosaèdre*	—	20	—

Un tétraèdre est toujours convexe. Ses faces sont des triangles.

98. On appelle *prisme* un polyèdre dont deux des faces appelées *bases*, sont situées dans des plans parallèles et dont les autres faces, appelées *faces latérales*, sont des parallélogrammes ayant chacun un côté commun avec chacune des bases (*).

Pour construire un prisme (fig. 60) on peut se donner arbitrairement un polygone plan ABCD, mener par le sommet A une droite quelconque non située dans le plan de ce polygone, puis mener par un point E quelconque de cette droite le plan parallèle au plan ABCD, qui rencontre en F, G, H, les parallèles à AE menées par les autres sommets B, C, D ; enfin, tracer les droites EF, FG, GH, HE. Les faces ABFE, BCGF...., sont évidemment des parallélogrammes, donc la figure ABCDEFGH est un prisme.

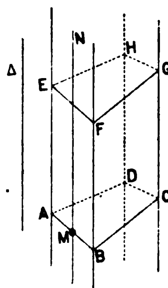


Fig. 60.

Les bases ABCD, EFGH *sont des polygones égaux ;* car on peut les amener à coïncider au moyen d'une translation.

On dit qu'un prisme est *triangulaire*, *quadrangulaire*, etc., selon que ses bases sont des triangles, des quadrilatères, etc.

Les arêtes AE, BF, CG, DH, non situées dans les plans des bases se nomment *arêtes latérales*.

99. Si on prolonge indéfiniment ces arêtes, on obtient une *surface prismatique*, formée par les portions de plan comprises entre AE et BF, BF et CG, CG et DH, DH et AE.

(*) Pour qu'un polyèdre soit un prisme, il ne suffit pas que deux des faces soient situées dans des plans parallèles et que toutes les autres faces soient des parallélogrammes. Ainsi, le solide formé par deux prismes ayant une base commune n'est pas un prisme, en général.

On peut définir directement une surface prismatique comme le lieu des droites MN menées par les divers points d'une ligne brisée fermée ABCDA, plane ou gauche, parallèlement à une direction donnée Δ. Les *arêtes* AE, BF..., de cette surface sont les parallèles à Δ menées par les sommets de la ligne brisée.

A ce point de vue, un prisme est le solide obtenu en coupant une surface prismatique par deux plans parallèles non parallèles aux arêtes.

On appelle *section droite* d'une surface prismatique, la section faite par un plan perpendiculaire aux arêtes AE, BF..... Toutes ces sections droites sont égales [98].

Plus généralement, deux sections faites dans une surface prismatique par des plans parallèles sont égales.

100. On appelle *hauteur* d'un prisme la distance des deux bases.

On dit qu'un prisme est *droit*, quand les arêtes latérales sont perpendiculaires aux plans des bases ; *oblique*, dans le cas contraire.

On dit qu'un prisme est *régulier*, quand il est droit et qu'il a pour base un polygone régulier.

101. On appelle *parallélépipède* un prisme dont les bases sont des parallélogrammes. Toutes les faces d'un parallélépipède sont des parallélogrammes.

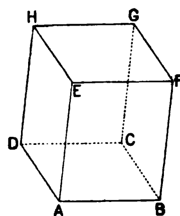


Fig. 61.

On peut prendre comme bases d'un parallélépipède deux faces opposées quelconques, par exemple, ABFE et DCGH (fig. 61). En effet, les plans de ces deux faces sont parallèles [17], car AB et BF sont respectivement parallèles à DC et à CG

et les quatre autres faces sont des parallélogrammes.

Les douze arêtes d'un parallélépipède ABCDEFGH (fig. 62) sont parallèles quatre à quatre. Si l'on prolonge indéfiniment quatre arêtes parallèles, par exemple, AE, BF, CG, DH, on obtient une surface prismatique, dont les faces opposées sont parallèles deux à deux.

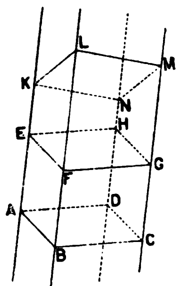


Fig. 62.

Par conséquent, *la section* KLMN *faite dans cette surface par un plan quelconque est un parallélogramme.*

Un parallélépipède, comme tout autre prisme, peut être *droit* ou *oblique* [100]. Mais il faut remarquer qu'un même parallélépipède peut être droit ou oblique, selon les faces que l'on prend pour bases.

On appelle *parallélépipède rectangle* un parallélépipède droit dont les bases sont des rectangles. Toutes les faces d'un pareil parallélépipède sont des rectangles ; donc ce parallélépipède est droit, quelles que soient les faces que l'on prenne pour bases.

On appelle *dimensions* d'un parallélépipède rectangle les longueurs de trois arêtes issues d'un même sommet.

On appelle *cube* un parallélépipède rectangle dont les trois dimensions sont égales. Les six faces d'un cube sont des carrés égaux.

102. **Théorème.** — *Les quatre diagonales d'un parallélépipède* ABCDEFGH (fig. 63) *concourent en un même point, qui est au milieu de chacune d'elles.*

En effet, deux de ces diagonales, par exemple AG et CE, sont les diagonales du quadrilatère ACGE. Mais ce

[illegible] E et CG sont [illegible] e sont aussi, [illegible]

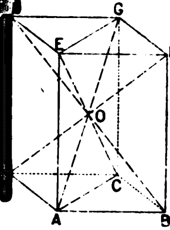


Fig. 63.

[illegible] rectangle, les [illegible] de, AG = CE, [illegible] ctangle.

[illegible] être rectangle, [illegible] nt perpendicu- [illegible] les sont sim- [illegible]

[illegible] le parallélo- [illegible]

[illegible] *llélépipède rec-* [illegible] *la somme des* [illegible]

[illegible] ède rectangle. [illegible] en B et en C; [illegible]

Corollaire. — *Le rapport de la diagonale d'un cube à son arête est égal à $\sqrt{3}$.*

EXERCICES

1. Dans tout tétraèdre, les quatre droites qui joignent chacun des sommets au centre de gravité de la face opposée et les trois droites qui joignent les milieux de deux arêtes opposées concourent en un même point, qui est au milieu des trois dernières droites et aux trois quarts des quatre premières, à partir du sommet. Ce point s'appelle le *centre de gravité* du tétraèdre.

2. Dans tout tétraèdre, les plans bissecteurs des six dièdres concourent en un même point.

Les plans perpendiculaires aux six arêtes en leurs milieux et les droites perpendiculaires aux quatre faces, menées par les centres des cercles circonscrits, concourent en un même point.

3. Dans un tétraèdre le plan bissecteur d'un dièdre intérieur ou extérieur partage chaque face (autre que celles du dièdre) en triangles proportionnels aux faces du dièdre. L'arête opposée à celle du dièdre est également partagée en segments proportionnels aux faces du dièdre.

4. Si, dans un tétraèdre, deux couples d'arêtes opposées sont orthogonales, les arêtes du troisième couple le sont aussi. Le pied de la perpendiculaire abaissée de chaque sommet sur la face opposée est l'orthocentre de cette face. Les perpendiculaires communes aux trois couples d'arêtes opposées et les perpendiculaires abaissées des quatre sommets sur les faces opposées concourent en un même point.

5. La section faite dans un tétraèdre par un plan parallèle à deux arêtes opposées est un parallélogramme. Quel est le maximum de l'aire de ce parallélogramme ?

6. Construire un tétraèdre, connaissant :

1° Les trois droites joignant les milieux des arêtes opposées et les angles que ces droites font entre elles deux à deux ;

2° Une face et les longueurs des droites joignant les milieux des arêtes opposées.

3° Une face et les distances de ses sommets aux centres de gravité des autres faces.

7. Un tétraèdre SABC est coupé par un plan sécant abc ; par le sommet S et les points de rencontre A′, B′, C′, des droites Bc, Cb (sur la face BSC), Ac et Ca (sur la face SAC), Ba et Ab (sur la face SAB), on mène des droites SA′, SB′, SC′ qui rencontrent les arêtes BC, CA, AB respectivement en α, β, γ. Prouver que : 1° Aα, Bβ,

$C\gamma$, se rencontrent en un point S′; 2° les quatre droites SS′, AA′, BB′, CC′ se rencontrent en un même point; 3° les trois plans ABC, *abc*, A′B′C′ ont une droite commune.

8. On mène par le sommet S d'un tétraèdre SABC une droite SD faisant des angles égaux avec les faces SAB, SBC, SCA et rencontrant la base ABC en un point D; puis l'on trace DA, DB, DC. Prouver que les triangles ABD, BCD, CAD sont proportionnels aux faces SAB, SBC, SCA.

9. Dans un prisme à base de quadrilatère, la somme des carrés des quatre diagonales est égale à la somme des carrés des douze arêtes, moins huit fois le carré de la droite qui joint les deux points de rencontre des diagonales.

10. Dans tout parallélépipède, la somme des carrés des douze arêtes est égale à la somme des carrés des quatre diagonales.

11. La somme des carrés des distances d'un point quelconque aux huit sommets d'un parallélépipède est égale à huit fois le carré de la distance de ce point au point de concours des diagonales, plus la moitié de la somme des carrés des diagonales.

12. Lieu du point d'un plan donné tel que la somme des carrés de ses distances aux sommets d'un parallélépipède donné soit égale à un carré donné.

13. Construire un parallélépipède dont trois arêtes soient portées par trois droites données non situées deux à deux dans un même plan.

14. La somme des distances des sommets d'un parallélépipède à un plan quelconque est égal à huit fois la distance de son centre au même plan.

15. Couper un cube par un plan de façon que la section soit un hexagone régulier.

16. Couper un prisme triangulaire par un plan de façon que la section soit semblable à un triangle donné.

17. Par les côtés d'un hexagone régulier ABCDEF on élève six faces perpendiculaires au plan de cet hexagone : ABA′B′, BCB′C′, etc., et l'on prend trois arêtes égales AA′ = CC′ = EE′; puis, par un point S de l'axe de l'hexagone et par chacune des droites A′C′, C′E′, E′A′, on fait passer un plan. Les trois plans SA′C′, SC′E′, SE′A′, coupent en B′, D′, F′ les arêtes BB′, DD′, FF′ et déterminent ainsi un solide. Quelle doit être la position de S pour que la surface du décaèdre ainsi formé soit minimum? (Alvéole des abeilles.)

CHAPITRE II

VOLUME DU PRISME

105. On désigne par le mot *volume* la grandeur d'un polyèdre, de même qu'on désigne par le mot *longueur* la grandeur d'une portion de ligne, et par le mot *aire* la grandeur d'une portion de surface.

On dit que le volume d'un polyèdre A est la *somme* des volumes des polyèdres B, C, D, ou, plus simplement, que A est la *somme* de B, C, D, et on écrit :

$$A = B + C + D,$$

lorsque le polyèdre A est formé de parties respectivement *superposables* à B, C, D.

On dit que le volume d'un polyèdre A est *plus grand* que celui d'un polyèdre B, ou que le volume de B est *plus petit* que celui de A, et on écrit :

$$A > B, \quad \text{ou} \quad B < A,$$

lorsqu'on peut décomposer A en parties dont l'une soit superposable à B. La somme des autres parties s'appelle *la différence entre* A *et* B, et se représente par A — B.

Ainsi, dire que

$$A - B = C + D,$$

c'est dire que

$$A = B + C + D.$$

On dit que les volumes de deux polyèdres sont *égaux*, ou que ces deux polyèdres sont *équivalents*, lorsqu'on

peut les considérer comme sommes, ou comme différences, ou comme limites de sommes de polyèdres respectivement superposables.

Lorsque deux polyèdres A et B peuvent être considérés comme sommes, ou comme différences, ou comme limites de sommes de polyèdres respectivement *équivalents*, *dans le sens que l'on vient de définir*, nous dirons encore que les deux polyèdres A et B sont eux-mêmes *équivalents*, ou que leurs volumes sont *égaux*.

Dans tous les cas, on exprime l'*équivalence*, c'est-à-dire l'*égalité des volumes* de deux polyèdres A et B en écrivant simplement

$$A = B.$$

On définit le *rapport* de deux volumes de la même manière que le rapport des autres espèces de grandeur.

La *mesure* d'un volume est le rapport de ce volume à un autre volume pris pour unité. On prend d'ordinaire pour unité de volume le cube qui a pour arête l'unité de longueur.

MESURE DU PARALLÉLÉPIPÈDE RECTANGLE

106. **Théorème.** — *Deux prismes droits de même base et de même hauteur sont égaux.*

En effet, on peut les faire coïncider en les portant l'un sur l'autre, de façon que leurs bases coïncident.

107. **Théorème.** — *Le rapport de deux parallélépipèdes rectangles de même base est égal au rapport de leurs hauteurs.*

En effet (fig. 64), soient P et Q deux parallélépipèdes rectangles de même base; AB et CD leurs hauteurs. Il s'agit de prouver que

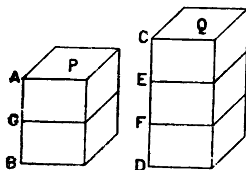


Fig. 64.

$$\frac{P}{Q} = \frac{AB}{CD}.$$

1° Supposons que le rapport $\frac{AB}{CD}$ soit *rationnel;* par exemple :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}.$$

Cela veut dire que, si l'on partage CD en trois parties égales CE, EF, FD, puis AB en deux parties égales AG, GB, toutes ces parties sont égales. Donc, si par les points de division E, F, G on mène les plans parallèles aux bases, on formera 5 parallélépipèdes partiels égaux, comme ayant même base et même hauteur. Mais P contient 2 de ces parallélépipèdes partiels et Q en contient 3 ; donc

$$\frac{P}{Q} = \frac{2}{3} = \frac{AB}{CD}.$$

2° Supposons que le rapport $\frac{AB}{CD}$ soit *irrationnel.* Il faut prouver que, quelle que soit la fraction $\frac{m}{n}$, les deux différences

$$P - \frac{m}{n} Q, \quad AB - \frac{m}{n} CD$$

sont de même signe ; c'est-à-dire que P est supérieur ou inférieur à $\frac{m}{n}$ Q, selon que AB est supérieur ou inférieur à $\frac{m}{n}$ CD.

n parties
de A, *m* lon-
es, la somme
et alors, en
plans paral-
grand que la
un à $\frac{1}{n}$ Q.

D, on a aussi

nsi :
ectangles qui
u rapport de

rallélépipèdes
des rapports

es rectangles :
', N' celles du
épipèdes rec-
M et N, l'autre
n compare P
s communes ;
ièmes dimen-

De même,

$$\frac{Q}{R} = \frac{M}{M'},$$

$$\frac{R}{P'} = \frac{N}{N'}.$$

En multipliant membre à membre, on trouve

$$\frac{P}{Q} \times \frac{Q}{R} \times \frac{R}{P'} = \frac{L}{L'} \times \frac{M}{M'} \times \frac{N}{N'};$$

par conséquent,

$$\frac{P}{P'} = \frac{L}{L'} \times \frac{M}{M'} \times \frac{N}{N'}.$$

109. ***Théorème.*** — *Si l'on prend pour unité de volume le cube qui a pour arête l'unité de longueur, le volume d'un parallélépipède rectangle a pour mesure le produit des nombres qui mesurent ses trois dimensions.*

En effet, si, dans l'égalité précédente, nous supposons que P' est le cube qui a pour arête l'unité de longueur, les trois dimensions L', M', N' de ce cube seront égales à l'unité de longueur; donc $\frac{L}{L'}$ sera la mesure de L, $\frac{M}{M'}$ celle de M et $\frac{N}{N'}$ celle de N.

De plus, puisque nous prenons P' pour unité de volume, $\frac{P}{P'}$ est la mesure de P ; donc

$$\text{Mesure de } P = \text{mes. } L \times \text{mes. } M \times \text{mes. } N.$$

Pour abréger, on convient d'écrire simplement

$$P = L \times M \times N,$$

et de dire que *le volume d'un parallélépipède rectangle est égal au produit de ses trois dimensions.*

En particulier, *le volume d'un cube est égal au cube de son arête.*

On ramène la mesure du volume d'un parallélépipède et d'un prisme quelconques à celle du parallélépipède rectangle au moyen du théorème suivant.

110. **Théorème.** — *Tout prisme oblique est équivalent au prisme droit qui a pour base une section droite et pour hauteur une arête latérale du prisme oblique.*

Soit (fig. 65) ABCDEFGH un prisme oblique. Prenons, sur le prolongement de l'arête latérale EA, un point K assez éloigné pour que le prisme proposé soit tout entier d'un même côté du plan perpendiculaire à EA au point K ; ce plan rencontrera les *prolongements* des arêtes latérales FB, GC, HD en des points L, M, N. Puis prenons sur KE un point O tel que KO = AE, et menons par ce point un deuxième plan perpendiculaire à AE, qui coupe les arêtes FB, GC, HD, ou leurs prolongements, en P, Q, R. Il s'agit de prouver que le prisme droit KLMNOPQR est équivalent au prisme oblique proposé.

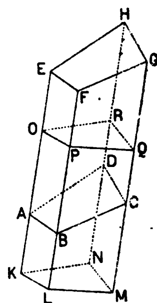


Fig. 65.

En effet, les deux polyèdres KLMNABCD, OPQREFGH sont égaux, car on peut les amener à coïncider au moyen de la translation représentée par le vecteur $\overline{KO}$. Or, si du solide total on retranche le premier de ces deux polyèdres, il reste le prisme oblique proposé ; si l'on retranche le second, il reste le prisme droit KQ. Donc ce prisme droit est équivalent au prisme oblique.

MESURE DU PARALLÉLÉPIPÈDE DROIT

111. **Théorème.** — *Si l'on prend pour unité de volume le cube qui a pour arête l'unité de longueur et pour unité*

d'aire le carré qui a pour côté l'unité de longueur, le volume d'un parallélépipède droit est égal au produit de sa base par sa hauteur.

Soit (fig. 66) ABCDEFGH un parallélépipède droit ayant pour base le parallélogramme ABCD et pour hauteur AE. On peut le considérer comme un prisme oblique ayant pour base ADHE et pour arêtes latérales AB, DC, HG, EF; donc il est équivalent au prisme droit qui a pour hauteur l'une de ces arêtes, AB par exemple, et pour base une section droite MNPQ perpendiculaire à ces arêtes. Mais cette section droite est un rectangle; car tous ses angles sont droits, comme étant les rectilignes des dièdres droits AB, DC, HG, EF. Donc le prisme droit qui a pour hauteur AB et pour base MNPQ est un parallélépipède rectangle dont les trois dimensions sont AB, MN, MQ; son volume est donc égal à

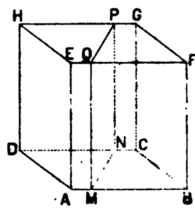


Fig. 66.

$$AB \times MN \times MQ.$$

Par conséquent, le volume du parallélépipède proposé AG est, lui aussi, égal à ce produit. Or MN est la hauteur du parallélogramme ABCD; donc [G. P. 228] l'aire de ce parallélogramme est égale à AB×MN, puisqu'on prend pour unité d'aire le carré qui a pour côté l'unité de longueur. D'ailleurs, MQ = AE, comme côtés opposés d'un rectangle. Donc enfin le volume du parallélépipède proposé AG est égal à

$$ABCD \times AE,$$

c'est-à-dire égal au produit de sa base ABCD par sa hauteur AE.

MESURE DU PARALLÉLÉPIPÈDE OBLIQUE

112. **Théorème.** — *Le volume d'un parallélépipède quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

Soit (fig. 67) ABCDEFGH un parallélépipède quelconque ayant pour base ABCD. On peut le considérer comme ayant pour base ADHE et pour arêtes latérales AB, DC, HG, EF; donc il est équivalent au parallélépipède droit qui a pour hauteur l'une de ces arêtes, AB par exemple, et pour base une section droite MNPQ perpendiculaire à ces arêtes. Or [111] le volume de ce parallélépipède droit est égal à MNPQ$\times$AB; donc, en appelant V le volume du parallélépipède proposé AG, on a aussi

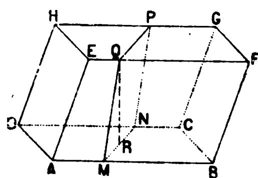


Fig. 67.

$$V = MNPQ \times AB.$$

Abaissons QR perpendiculaire sur MN; l'aire du parallélogramme MNPQ est égale à MN$\times$QR; donc

$$V = AB \times MN \times QR.$$

Or AB est la base et MN la hauteur du parallélogramme ABCD; donc AB$\times$MN est égal à l'aire de ce parallélogramme. Par conséquent,

$$V = ABCD \times QR.$$

Reste à prouver que QR est la hauteur du parallélépipède proposé. En effet, cette droite QR est contenue dans le plan de la section droite; donc elle est perpendiculaire à AB. D'ailleurs, elle est aussi perpendiculaire à MN, par construction; donc elle est perpendiculaire au plan déter-

miné par les deux droites, AB et MN, c'est-à-dire au plan de la base ABCD.

MESURE DU PRISME

113. **Théorème.** — *Le volume d'un prisme triangulaire est égal au produit de sa base par sa hauteur.*

1° Considérons d'abord un prisme triangulaire droit ABCDEF (fig. 68) ayant pour base ABC et pour hauteur AD. Construisons le parallélépipède CAGBFDHE qui a pour arêtes CA, CB, CF ; pour cela, il suffit de mener AG égal et parallèle à CB, puis GH égal et parallèle à AD. Ce parallélépipède se compose de deux prismes droits, AF et AH, qui sont superposables, comme ayant même base et même hauteur [106]; donc le volume de

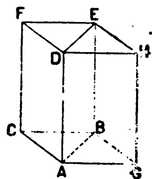


Fig. 68.

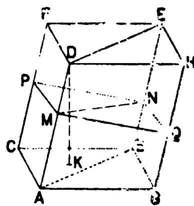


Fig. 69.

chacun de ces prismes est la moitié de celui du parallélépipède. Or le volume du parallélépipède est égal au produit de sa base CAGB par sa hauteur AD; donc le volume du prisme proposé AF est égal à

$$\frac{1}{2}\,\text{CAGB} \times \text{AD} \quad \text{ou à} \quad \text{ABC} \times \text{AD}.$$

2° Considérons un prisme oblique ABCDEF (fig. 69) ayant pour base ABC et pour hauteur DK. Nous allons

est encore la
GBFDHE qui a

pose des deux
rismes obliques
prismes droits
r bases respec-
tes par un plan
ections droites
tère MPNQ est

droits qui ont
pour hauteur
donc les pris-
nt équivalents,
séquent, le vo-
celui du paral-
ipède est égal
teur DK; donc

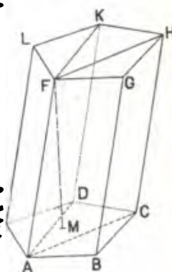


Fig. 70.

décomposer en
commune FM
ABC, ACD,

ADE. Donc, en appelant V le volume du prisme total, on a :

$$V = (ABC + ACD + ADE) \times FM$$

ou

$$V = ABCDE \times FM.$$

EXERCICES

1. Deux parallélépipèdes ayant un angle trièdre égal ou symétrique sont entre eux comme les produits des arêtes de ce trièdre.

2. Les arêtes d'un parallélépipède étant a, b, c, on peut mettre l'expression de son volume V sous la forme $V = abc.\,v$; prouver que $v \leq 1$. Donner la signification géométrique de v.

3. Calculer les arêtes et le volume d'un parallélépipède rectangle dont la surface a 4 mètres carrés et dont les arêtes sont proportionnelles aux nombres 2, 3, 6.

4. Calculer les dimensions d'un parallélépipède rectangle dont on connaît la diagonale, la surface et dans lequel une des dimensions est la moyenne arithmétique des deux autres.

5. Parmi tous les parallélépipèdes rectangles de même surface, quel est celui dont le volume est maximum.

6. Inversement, parmi les parallélépipèdes rectangles de même volume, quel est celui dont la surface est minimum.

7. De tous les prismes de même base et de même hauteur, le prisme droit a la plus petite surface.

8. De tous les prismes ayant n faces, le prisme régulier a :

1° La plus petite surface quand les bases sont équivalentes et les hauteurs égales ;

2° Le plus grand volume et la plus grande base quand les surfaces latérales sont équivalentes et les hauteurs égales ;

3° Le plus grand volume et la plus grande hauteur quand les surfaces latérales sont équivalentes et les bases équivalentes ;

4° La plus petite base et la plus grande hauteur, quand les surfaces latérales sont équivalentes et les volumes équivalents.

9. De deux prismes réguliers celui qui a le plus de faces possède les quatre propriétés précédentes.

CHAPITRE III

VOLUME DE LA PYRAMIDE

115. On appelle *pyramide* un polyèdre dont l'une des faces, appelée *base*, est un polygone quelconque, et dont les autres faces, appelées *faces latérales*, sont des triangles ayant pour bases respectives les côtés de ce polygone et pour sommet commun un point non situé dans le plan du polygone; ce point s'appelle *sommet* de la pyramide.

On dit qu'une pyramide est *triangulaire*, *quadrangulaire*, etc., selon qu'elle a pour base un triangle, un quadrilatère, etc. Un tétraèdre est une pyramide triangulaire, ayant pour base l'une quelconque des quatre faces et pour sommet le sommet opposé.

On appelle *hauteur* d'une pyramide la distance du sommet au plan de la base.

On dit qu'une pyramide est *régulière* quand elle a pour base un polygone régulier et que le pied de la hauteur est au centre de la base.

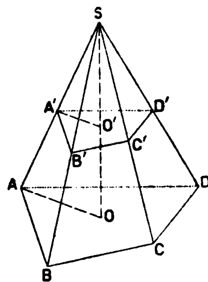


Fig. 71.

116. **Théorème.** — *Toute section faite dans une pyramide par un plan parallèle à la base est un polygone semblable au polygone de base, et le rapport des aires de ces deux polygones est égal au carré du rapport de leurs distances au sommet.*

Soit (fig. 71) A'B'C'D' la section faite dans la pyramide

SABCD par un plan parallèle à la base. Les deux polygones ABCD, A'B'C'D' sont homothétiques par rapport à S et par conséquent semblables. Nous savons [G. P. 250] que le rapport des aires de ces deux polygones est égal au carré du rapport de deux côtés homologues AB et A'B', par exemple. Abaissons SO perpendiculaire sur le plan de la base, et soit O' le point de rencontre de cette perpendiculaire avec le plan de la section; puis traçons les droites AO et A'O', qui sont parallèles, comme intersections de deux plans parallèles par un troisième. Il en résulte que

$$\frac{\mathrm{SO}}{\mathrm{SO'}} = \frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{SA'}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}};$$

par conséquent,

$$\frac{\mathrm{ABCD}}{\mathrm{A'B'C'D'}} = \left(\frac{\mathrm{SO}}{\mathrm{SO'}}\right)^2.$$

117. Corollaire. — *Les sections faites dans deux pyramides de même hauteur par des plans parallèles aux bases, à la même distance des sommets, sont proportionnelles aux bases.*

En effet, soient b et b' les bases des deux pyramides, h leur hauteur commune, d la distance des plans sécants aux sommets, s et s' les aires des sections faites par ces plans dans les deux pyramides. On a, en vertu du théorème précédent,

$$\frac{s}{b} = \frac{d^2}{h^2}, \quad \frac{s'}{b'} = \frac{d^2}{h^2};$$

d'où

$$\frac{s}{b} = \frac{s'}{b'}.$$

En particulier, *si les bases b et b' sont équivalentes, les sections s et s' le sont aussi.*

118. **Théorème.** — *Deux pyramides de bases équivalentes et de même hauteur sont équivalentes.*

Soient (fig. 72) SABC, TDEFG deux pyramides dont

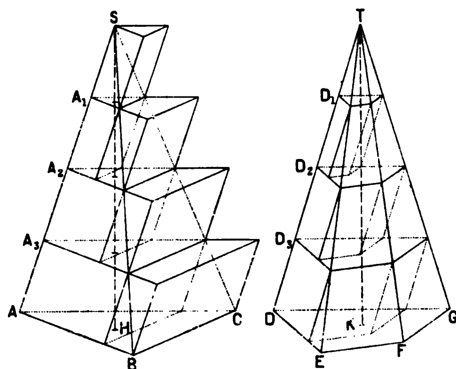


Fig. 72.

les bases ABC, DEFG sont équivalentes et dont les hauteurs SH, TK sont égales.

Supposons les bases dans le même plan et les sommets d'un même côté de ce plan. Partageons l'une des hauteurs, SH, par exemple, en n parties égales et, par les points de division, menons les plans P_1, P_2,... parallèles au plan des bases (P_1 étant le plus rapproché du sommet, P_2 le suivant, etc.) ; soient A_1, A_2,.... et D_1, D_2.... les points de rencontre de ces plans avec les arêtes SA et TD. Les sections faites par chacun de ces plans dans les deux pyramides sont équivalentes [117] ; si donc nous inscrivons aux deux pyramides des prismes ayant pour bases ces sections et pour arêtes latérales A_1A_2, A_2A_3,... et D_1D_2, D_2D_3,..., les prismes inscrits à la première pyramide sont respectivement équivalents aux prismes inscrits à la seconde, comme ayant des bases équivalentes et même hauteur. Par conséquent, la

somme s des prismes inscrits à la première pyramide équivaut à la somme t des prismes inscrits à la seconde, et, pour démontrer que les deux pyramides sont équivalentes, il suffit de prouver que, lorsque n augmente indéfiniment, s et t ont pour limites respectives les volumes des deux pyramides.

Soit v le volume de la première pyramide ; on a évidemment $s < v$. D'autre part, si l'on construit n prismes *exinscrits* ayant pour arêtes latérales SA_1, A_1A_2,..., et pour bases les $n - 1$ sections faites par les plans P_1, P_2,... et la base même de la pyramide, la somme s' de ces n prismes exinscrits est plus grande que v :

$$s < v < s'.$$

Or chaque prisme inscrit est égal au prisme exinscrit de même rang, comme ayant même base et même hauteur ; mais il y a un prisme exinscrit de plus, celui qui a pour base la base ABC de la pyramide. Donc la différence $s' - s$ est égale à ce dernier prisme exinscrit et, par suite, a pour expression

$$s' - s = \text{ABC} \times \frac{1}{n} \text{SH} ;$$

il en résulte que $s' - s$ tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Donc il en est de même, *a fortiori*, de la différence $v - s$, c'est-à-dire que s a pour limite v lorsque n augmente indéfiniment.

On démontre de même que t a pour limite le volume de la seconde pyramide ; donc, puisque $s = t$, quel que soit n, les deux pyramides sont équivalentes.

119. **Théorème.** — *Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

1° Considérons une pyramide triangulaire SABC

(fig. 73). Cette pyramide est le tiers du prisme ABCDSE qui a pour base la base ABC de la pyramide et pour arête latérale SB. En effet, en menant le plan SAD, on voit que ce prisme se compose de trois pyramides :

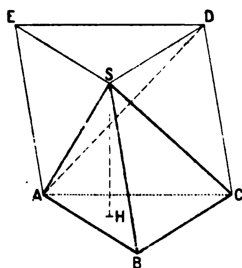


Fig. 73.

SABC, ASDE, SADC.

Les deux pyramides SABC, ASDE sont équivalentes, comme ayant des bases égales, ABC et ESD, et même hauteur SH ; les deux pyramides SADE, SDAC sont aussi équivalentes, comme ayant des bases égales, ADE et DAC, et même hauteur égale à la distance du point S au plan ACDE. Donc la pyramide proposée SABC est bien le tiers du prisme ABCDSE ; mais le volume de ce prisme est égal à ABC $\times$ SH, donc celui de la pyramide est égal à $\frac{1}{3}$ ABC $\times$ SH.

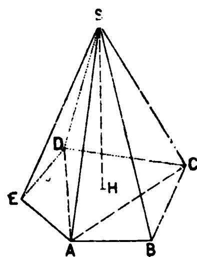


Fig. 74.

2° Considérons (fig. 74) une pyramide SABCDE ayant pour base un polygone quelconque ABCDE et pour hauteur SH. On peut la décomposer en pyramides triangulaires ayant pour hauteur commune SH et pour bases respectives les triangles ABC, ACD, ADE. Or les volumes de ces pyramides sont respectivement égaux à

$$\frac{1}{3} \text{ABC} \times \text{SH}, \quad \frac{1}{3} \text{ACD} \times \text{SH}, \quad \frac{1}{3} \text{ADE} \times \text{SH} ;$$

donc le volume de la pyramide totale est égal à

$$\frac{1}{3} (\text{ABC} + \text{ACD} + \text{ADE}) \, \text{SH},$$

c'est-à-dire égal à $\frac{1}{3}$ ABCDE $\times$ SH.

120. Corollaire. — *Deux pyramides de même base sont proportionnelles à leurs hauteurs. Deux pyramides de même hauteur sont proportionnelles à leurs bases.*

121. On appelle *tronc de pyramide* le solide ABCDA'B'C'D' (fig. 76) obtenu en coupant une pyramide SABCD par un plan parallèle à la base et en enlevant la pyramide SA'B'C'D', qui a pour base la section et pour sommet le sommet de la pyramide. Les deux polygones ABCD, A'B'C'D' sont les *bases* du tronc et la distance des plans de ces deux bases est la *hauteur* du tronc.

122. **Théorème.** — *Tout tronc de pyramide est la somme de trois pyramides ayant pour hauteur commune la hauteur du tronc et pour bases respectives les deux bases du tronc et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases.*

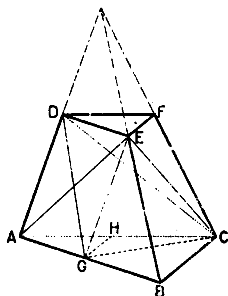


Fig. 75.

1° Soit (fig. 75) ABCDEF un tronc de pyramide triangulaire. En menant les plans AEC, DEC, on partage le tronc en trois pyramides : les deux premières, EABC, CDEF, ont pour hauteur la hauteur du tronc et pour bases respectives les deux bases ABC, DEF du tronc.

Reste la troisième pyramide EADC; en appelant G le point de rencontre de AB avec la parallèle à AD menée par E, cette troisième pyramide EADC équivaut à la pyramide GADC, comme ayant même base et même hauteur. Mais si l'on prend D pour sommet de cette dernière pyramide, on voit qu'elle a pour hauteur la hauteur du tronc ; il suffit donc de prouver que sa base CAG est la moyenne proportionnelle entre les deux

bases ABC, DEF du tronc. En effet, les deux triangles CAB, CAG ayant même hauteur sont entre eux comme leurs bases AB et AG :

$$\frac{CAB}{CAG} = \frac{AB}{AG}.$$

D'autre part, si H est le point de rencontre de AC avec la parallèle à BC menée par G, les deux triangles GAC, GAH ayant même hauteur sont entre eux comme leurs bases AC et AH :

$$\frac{GAC}{GAH} = \frac{AC}{AH}.$$

Mais $\frac{AB}{AG} = \frac{AC}{AH}$; donc

$$\frac{CAB}{CAG} = \frac{CAG}{GAH}.$$

Or les triangles AGH, DEF sont égaux comme ayant un côté égal, AG = DE, adjacent à deux angles égaux chacun à chacun. Donc enfin

$$\frac{ABC}{CAG} = \frac{CAG}{DEF};$$

c'est-à-dire que la base CAG de la troisième pyramide

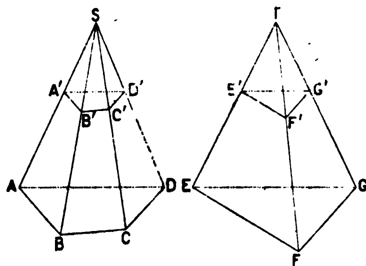


Fig. 76.

est moyenne proportionnelle entre les deux bases ABC, DEF du tronc.

2° Soit (fig. 76) ABCDA'B'C'D' un tronc de pyramide à

bases polygonales, obtenu en coupant la pyramide SABCD par un plan parallèle à la base. Construisons une pyramide *triangulaire* TEFG ayant pour base un triangle EFG situé dans le plan ABCD et équivalent au polygone ABCD, et pour sommet un point T du plan mené par S parallèlement au plan ABCD. La section E′F′G′ faite dans cette pyramide par le plan A′B′C′D′ est équivalente au polygone A′B′C′D′ [117]. Par conséquent, les deux pyramides SABCD, SA′B′C′D′ sont respectivement équivalentes aux pyramides triangulaires TEFG, TE′F′G′ ; donc le tronc ABCDA′B′C′D′ est équivalent au tronc EFGE′F′G′ et, par suite [1°], équivaut à la somme de trois pyramides ayant toutes trois pour hauteur la hauteur commune des deux troncs, et pour bases respectives :

$$\text{EFG},\quad \text{E'F'G'},\quad \sqrt{\text{EFG}\times\text{E'F'G'}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\text{ABCD},\quad \text{A'B'C'D'},\quad \sqrt{\text{ABCD}\times\text{A'B'C'D'}}.$$

Si donc on désigne par b et b' les bases, par h la hauteur, et par v le volume d'un tronc de pyramide quelconque, on a

$$(1)\qquad v = \frac{1}{3}h\left(b + b' + \sqrt{bb'}\right).$$

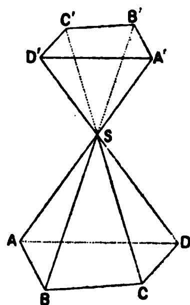


Fig. 77.

123. Si l'on coupe les prolongements des arêtes d'une pyramide SABCD (fig. 77) au delà du sommet, par un plan parallèle à la base, on obtient une seconde pyramide SA′B′C′D′ : l'ensemble des deux pyramides SABCD, SA′B′C′D′ s'appelle un *tronc de pyramide de seconde espèce*, par opposition au tronc de pyramide ordinaire, ou *de première espèce*, qui est la *différence* de deux pyramides.

124. Soient b et b' les bases ABCD, A'B'C'D' d'un tronc de première ou de deuxième espèce; h la *hauteur* du tronc, c'est-à-dire la distance des plans des deux bases; x la hauteur de la pyramide SABCD et x' celle de la pyramide SA'B'C'D'.

En appelant v le volume du tronc, on a

$$v = \frac{1}{3} bx - \frac{1}{3} \varepsilon b'x'$$
$$h = x - \varepsilon x',$$

ε étant égal à $+1$, ou à -1, selon que le tronc est de première ou de seconde espèce.

Mais [116]

$$\frac{b'}{b} = \frac{x'^2}{x^2};$$

d'où

$$\frac{x}{\sqrt{b}} = \frac{x'}{\sqrt{b'}} = \frac{h}{\sqrt{b} - \varepsilon\sqrt{b'}}.$$

On en tire

$$x = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{b} - \varepsilon\sqrt{b'}}, \qquad x' = \frac{h\sqrt{b'}}{\sqrt{b} - \varepsilon\sqrt{b'}};$$

et, en portant dans l'expression de v, on trouve

$$v = \frac{1}{3} h \frac{(\sqrt{b})^3 - \varepsilon(\sqrt{b'})^3}{\sqrt{b} - \varepsilon\sqrt{b'}},$$

ou enfin

$$v = \frac{1}{3} h\,(b + \varepsilon\sqrt{bb'} + b').$$

TRONC DE PRISME TRIANGULAIRE

125. On appelle *tronc de prisme* le solide obtenu en coupant une surface prismatique par deux plans non parallèles.

126. **Théorème.** — *Le volume d'un tronc de prisme triangulaire est égal au produit de l'aire d'une section droite par le tiers de la somme des trois arêtes latérales.*

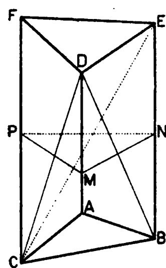


Fig. 78.

Soient (fig. 78) ABCDEF un tronc de prisme triangulaire, MNP une section droite, c'est-à-dire une section perpendiculaire aux arêtes latérales AD, BE, CF. En menant les plans BCD, CDE, on décompose le tronc en trois pyramides triangulaires DABC, EBCD, CFDE. La première est le tiers du prisme qui aurait pour base ABC et pour arête latérale AD; mais ce prisme est lui-même équivalent au prisme droit qui aurait pour base la section droite MNP et pour hauteur AD; donc le volume de la pyramide DABC est égal à

$$\frac{1}{3} AD \times MNP.$$

On démontre de même que les volumes des deux autres pyramides sont respectivement égaux à

$$\frac{1}{3} BE \times MNP, \quad \frac{1}{3} CF \times MNP.$$

Donc, le volume du tronc est égal à

$$\frac{1}{3} (AD + BE + CF) \times MNP.$$

Remarque. — Pour évaluer le volume d'un tronc de prisme quelconque, on le décompose en troncs de prismes triangulaires, à chacun desquels on applique la formule précédente.

PRISMATOÏDE

127. On appelle *prismatoïde* (fig. 79) un polyèdre dont deux des faces, appelées *bases*, sont situées dans des plans parallèles, et dont les autres faces, appelées *faces latérales*, sont ou des trapèzes ayant un côté commun avec chacune des bases, ou des triangles ayant deux sommets communs avec l'une des bases et un sommet commun avec l'autre (*). La distance des plans des deux bases s'appelle la *hauteur* du prismatoïde.

THÉORÈME. — *Si l'on désigne par h la hauteur, par b et b' les bases d'un prismatoïde, et par b'' la section faite par le plan équidistant des deux bases, le volume v du prismatoïde est donné par la formule :*

(1) $$v = \frac{1}{6} h (b + b' + 4b'').$$

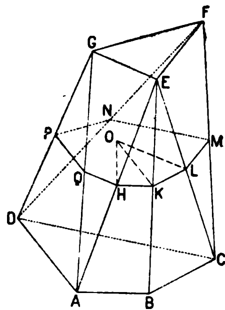


Fig. 79.

On peut toujours supposer que toutes les faces latérales sont des triangles; car, si quelques-unes d'entre elles étaient des trapèzes, on pourrait les décomposer en deux triangles. Cela étant, soient (fig. 79) ABCD, EFG les bases, HKLMNPQ la section équidistante des bases ; les points H, K,... sont les milieux des arêtes EA, EB,... Prenons à l'intérieur de la section HKLMNPQ un point O quelconque et joignons ce point à tous les sommets du prismatoïde; nous formons ainsi autant de pyramides qu'il y a de faces.

Les pyramides OABCD, OEFG ont pour bases b et b', et pour hauteur $\frac{h}{2}$; donc elles ont respectivement pour volumes

$$\frac{1}{6} hb \quad \text{et} \quad \frac{1}{6} hb'.$$

(*) Pour qu'un polyèdre soit un prismatoïde, il ne suffit pas que deux des faces soient situées dans des plans parallèles et que les autres faces soient des trapèzes ou des triangles; ainsi, le solide formé par deux troncs de pyramide ayant une base commune n'est pas un prismatoïde.

Considérons maintenant les pyramides OEAB, OEBC,..., qui ont pour bases les triangles latéraux. La pyramide OEAB est quadruple de la pyramide OEHK, car sa base EAB est quadruple de EHK; mais, si l'on prend OHK comme base de la pyramide OEHK, sa hauteur est $\frac{h}{2}$, donc son volume est $\frac{1}{6} h \times \text{OHK}$; par conséquent, le volume de la pyramide OEAB est égal à

$$\frac{1}{6} h \times 4\,\text{OHK}.$$

De même, le volume de la pyramide OEBC est

$$\frac{1}{6} h \times 4\,\text{OKL}.$$

Et ainsi de suite. Donc la somme des volumes des pyramides qui ont pour bases les triangles latéraux, est

$$\frac{1}{6} h \times 4\,(\text{OHK} + \text{OKL} + \ldots.)$$

ou

$$\frac{1}{6} h \times 4\,b''.$$

Donc enfin le volume total du prismatoïde est

$$v = \frac{1}{6} h\,(b + b' + 4\,b'').$$

Remarque. — Cette formule comprend, comme cas particuliers, les formules trouvées pour le prisme, la pyramide et le tronc de pyramide.

1° Pour un prisme, $b = b' = b''$; d'où

$$v = \frac{1}{6} h\,(b + b + 4\,b) = bh.$$

2° Pour une pyramide, $b' = 0$, $b'' = \frac{1}{4} b$; d'où

$$v = \frac{1}{6} h\,(b + b) = \frac{1}{3} bh.$$

ant par x, x', x''

section b'', on a

$\sqrt{b'}$;

prisme quadran-

BCD et $A'B'C'D'$

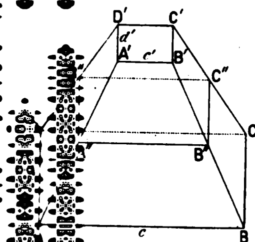


Fig. 80.

eux bases est un

) et $\frac{1}{2}(d+d')$,

Par conséquent, en appelant h la distance des plans ABCD, A'B'C'D', le volume v du solide est donné par la formule

$$v = \frac{1}{6} h[cd + c'd' + (c + c')(d + d')].$$

Cette formule subsiste dans le cas où l'une des dimensions du rectangle A'B'C'D' est nulle. Elle permet d'évaluer le volume des tombereaux, des tas de pierres disposés le long des routes, des fossés, etc.

EXERCICES

1. Le volume d'un tétraèdre ABCD (fig. 81) est le sixième du produit de la plus courte distance de deux arêtes opposées, AB et CD, par l'aire d'un parallélogramme dont les côtés sont égaux et parallèles à ces deux arêtes. — Car ce tétraèdre est le tiers du prisme ABECFD, par conséquent, le sixième du parallélépipède ABGECFHD.

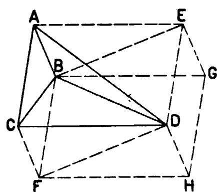


Fig. 81.

2. Évaluer le volume d'un tétraèdre en le considérant comme un prismatoïde ayant pour bases deux arêtes opposées.

3. Si deux arêtes opposées d'un tétraèdre se déplacent sur deux droites fixes, sans changer de longueur, le volume du tétraèdre reste constant.

4. Parmi tous les tétraèdres ayant deux sommets fixes A, B, et dont l'arête CD de longueur constante est mobile sur une droite donnée, quel est celui dont la surface est minimum?

5. Deux tétraèdres ayant un angle trièdre commun sont entre eux comme les produits des trois arêtes de ce trièdre. Même résultat si les tétraèdres ont un angle trièdre symétrique.

6. Par deux points donnés sur deux arêtes d'un tétraèdre, mener un plan qui partage ce tétraèdre en deux parties proportionnelles aux longueurs m, n.

7. Un tétraèdre dont la somme de trois faces est donnée, a le plus grand volume quand ces faces sont des triangles isocèles dont les plans sont perpendiculaires entre eux deux à deux.

8. Tout plan sécant mené par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre le divise en deux parties équivalentes.

9. Couper un tétraèdre par un plan de façon que la section soit un losange.

10. Dans un tétraèdre ayant trois faces équivalentes, la somme des distances d'un point quelconque du plan de la quatrième face aux trois premières est constante.

11. On donne deux tétraèdres ABCD, A'B'C'D', tels que les droites AA', BB', CC', DD', soient concourantes. Prouver que les intersections des faces correspondantes BCD et B'C'D', CDA et C'D'A', etc., sont quatre droites d'un même plan.

12. Par un point pris dans le plan de la base d'une pyramide régulière, on mène la perpendiculaire à ce plan ; la somme des distances des points de rencontre de cette perpendiculaire avec les plans des faces latérales au plan de la base est constante.

13. La somme des distances d'un point de la base d'une pyramide régulière aux plans des faces latérales est constante.

14. La base d'une pyramide régulière est un hexagone dont le côté est a. Calculer la hauteur de la pyramide, sachant que sa surface latérale vaut n fois celle de la base.

15. De toutes les pyramides de même hauteur et de bases équivalentes et ayant le même nombre de côtés, la pyramide régulière a la surface latérale minimum. Et de toutes les pyramides dont les surfaces latérales, composées d'un même nombre de faces, sont équivalentes, la pyramide régulière a un volume maximum.

16. Une pyramide dont la base est semblable à un polygone donné et fait une somme donnée avec une de ses faces latérales a un volume maximum si cette face est deux fois aussi grande que la base et lui est perpendiculaire.

17. Étant donné un prisme triangulaire, trouver le lieu des points tels que les pyramides ayant pour bases les faces latérales du prisme et un de ces points pour sommet commun soient équivalentes.

Évaluer le rapport des volumes du prisme et de l'une de ces pyramides.

18. Évaluer le volume d'un tronc de pyramide à bases polygonales, en le décomposant en troncs de pyramides triangulaires.

— Soient b, b' les deux bases ; b_1, b_2,... les triangles qui composent le polygone b ; et b'_1, b'_2,... les triangles homologues qui composent le polygone b'. On a

$$\frac{b'_1}{b_1} = \frac{b'_2}{b_2} = \dots = \frac{b'}{b};$$

d'où

$$\frac{\sqrt{bb'}}{b} = \frac{\sqrt{b_1 b'_1}}{b_1} = \frac{\sqrt{b_2 b'_2}}{b_2} = \dots = \frac{\sqrt{b_1 b'_1} + \sqrt{b_2 b'_2} + \dots}{b_1 + b_2 + \dots};$$

par conséquent,

$$\sqrt{b_1 b'_1} + \sqrt{b_2 b'_2} + \ldots = \sqrt{bb'}, \text{ etc.}$$

19. On coupe un tronc de pyramide à bases parallèles par un plan dont les distances aux deux bases sont proportionnelles à m et n; calculer l'aire de la section, connaissant les aires B, b des deux bases.

20. Couper un tronc de pyramide à bases parallèles par un plan parallèle aux bases, de façon que la section soit moyenne proportionnelle entre les deux bases.

21. On donne un tronc de pyramide à bases parallèles dont la hauteur est $1^m 12$ et le rapport de similitude des deux bases est 3. Partager ce tronc en deux troncs équivalents par un plan parallèle aux bases.

22. Par deux points donnés sur deux arêtes d'un prisme triangulaire, mener un plan qui partage le prisme en deux parties proportionnelles à m et n.

23. Partager une pyramide à base de parallélogramme en deux parties équivalentes par un plan mené par un des côtés de la base.

24. Partager la surface totale d'une pyramide quadrangulaire régulière en deux parties équivalentes, par un plan mené par l'un des côtés de la base.

25. Étant donné un tétraèdre SABC, on construit sur les faces SAB, SBC, SCA comme bases, trois prismes quelconques dont on prolonge les secondes bases jusqu'à leur point de rencontre F; on mène SF et l'on construit sur ABC comme base un prisme triangulaire dont les arêtes latérales soient égales et parallèles à SF. Prouver que le dernier prisme est équivalent à la somme des trois premiers.

26. Étant donné un tétraèdre à arêtes orthogonales dont toutes les faces sont des triangles acutangles, on construit sur ces faces comme bases quatre tétraèdres tels que les angles trièdres opposés aux bases soient trirectangles : la somme des carrés des volumes de ces quatre tétraèdres est égale au carré du volume du tétraèdre donné.

CHAPITRE IV

SYMÉTRIE

128. On dit que deux points A et A′ (fig. 82) sont *symétriques par rapport à un point* O, qu'on appelle *centre de symétrie*, lorsque le point O est le milieu de AA′.

On dit que deux points A et A′ (fig. 82) sont *symétriques par rapport à une droite* XY, qu'on appelle *axe de symétrie*, lorsque la droite XY est perpendiculaire au milieu de AA′.

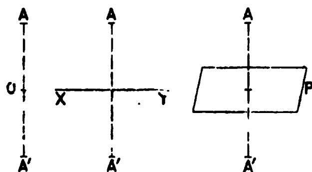


Fig. 82.

On dit que deux points A et A′ (fig. 82) sont *symétriques par rapport à un plan* P, qu'on appelle *plan de symétrie*, lorsque le plan P est perpendiculaire au milieu de AA′.

On dit que deux figures sont symétriques par rapport à un point, une droite ou un plan, lorsque les points de l'une sont symétriques des points de l'autre, par rapport à ce point, cette droite ou ce plan.

On dit qu'un point est *centre de symétrie*, ou simplement *centre* d'une figure, lorsque cette figure est symétrique d'elle-même par rapport à ce point. Ainsi, le point de rencontre des diagonales d'un parallélépipède est le centre du parallélépipède.

On dit qu'une droite est *axe de symétrie*, ou simplement *axe* d'une figure, lorsque cette figure est symétrique d'elle-même par rapport à cette droite. Ainsi la droite qui

joint les centres de deux faces opposées d'un cube est un axe de ce cube.

On dit qu'un plan est *plan de symétrie* d'une figure, lorsque cette figure est symétrique d'elle-même par rapport à ce plan. Ainsi, le plan équidistant des bases d'un prisme droit est un plan de symétrie de ce prisme.

129. **Théorème.** — *Deux figures symétriques par rapport à un axe* XY (*fig.* 82) *sont égales.*

Car on peut les amener à coïncider en faisant tourner l'une d'elles de 180° autour de l'axe.

Dans tout le reste de ce chapitre, il ne sera question que de la symétrie par rapport à un centre, ou par rapport à un plan.

130. **Théorème.** — *Deux figures* F′ *et* F″ *symétriques d'une même figure* F *par rapport à deux points différents* O *et* P (*fig.* 83) *sont égales.*

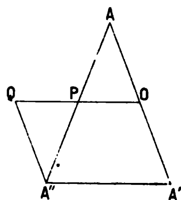


Fig. 83.

En effet, soient A un point de F, A′ et A″ les points correspondants de F′ et de F″. Dans le triangle AA′A″, la droite OP, qui joint les milieux de deux côtés, est parallèle au troisième côté A′A″ et égale à sa moitié. En d'autres termes, si Q est le symétrique de O par rapport à P, le vecteur A′A″ est égal et parallèle à OQ et de même sens. Donc on peut amener la figure F′ à coïncider avec la figure F″ au moyen de la translation représentée par le vecteur OQ.

Remarque. — Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un autre théorème que nous démontrerons dans le chapitre suivant [134,9°].

symétriques
à un plan P,
sont égales.

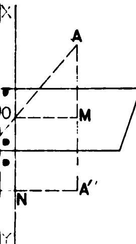


Fig. 84.

milieu N.
, par suite,
sont symé-
les figures
rapport à XY

symétriques
un plan P,
onque, sont

la figure Φ
du plan P ;
triques de F
Donc F′ est

d'une même
rents, sont

Car elles sont toutes deux égales à la symétrique de F par rapport à un point quelconque.

132. En résumé, si l'on convient de dire que deux figures sont *symétriques* quand on peut les placer de manière qu'elles soient symétriques *par rapport à un point ou par rapport à un plan*, on voit que toutes les figures symétriques d'une figure donnée sont égales entre elles. On peut donc les considérer comme des positions différentes d'une seule et même figure : c'est ce qu'on exprime en disant que *la figure symétrique d'une figure donnée est unique*.

1° *La figure symétrique d'une figure plane est une figure plane superposable à la première.*

Car la symétrique d'une figure plane par rapport au plan de cette figure est cette figure elle-même.

En particulier, *la figure symétrique d'un plan est un plan.*

2° *La figure symétrique d'un dièdre est un dièdre égal.*

Car la figure symétrique d'un dièdre par rapport à un point de son arête est le dièdre opposé par l'arête.

3° *La figure symétrique d'un angle polyèdre est un angle polyèdre dont tous les éléments sont respectivement égaux à ceux du premier, mais disposés dans l'ordre inverse.*

Car la figure symétrique d'un angle polyèdre par rapport au sommet de cet angle, est l'angle polyèdre qui a pour arêtes les prolongements de celles du premier au delà du sommet [78]. Il s'ensuit que deux angles polyèdres symétriques ne sont pas, en général, superposables.

4° Il résulte de ce qui précède que *la figure symétrique d'un polyèdre est un polyèdre dont les faces sont égales à celles du premier, mais disposées dans l'ordre inverse.*

Par conséquent, il n'est jamais possible de faire coïncider deux polyèdres symétriques *de façon que les faces de l'un s'appliquent sur les faces correspondantes de l'autre;* si donc toutes les faces d'un polyèdre sont inégales, il est impossible de le faire coïncider avec son symétrique, de quelque façon qu'on s'y prenne. Cela suffit pour affirmer que, *en général*, deux polyèdres symétriques ne sont pas superposables.

Toutes les figures qui ont un centre ou un plan de symétrie sont superposables à leurs symétriques, car elles sont symétriques d'elles-mêmes par rapport à ce centre ou par rapport à ce plan. Par exemple, deux parallélépipèdes symétriques sont superposables.

133. Dans tous les cas, *deux polyèdres symétriques sont équivalents.* Comme un polyèdre peut toujours être décomposé en tétraèdres, il suffit de prouver que deux tétraèdres symétriques sont équivalents.

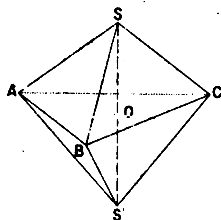


Fig. 85.

Soit (fig. 85) SABC un tétraèdre ; et soit S' le symétrique de S par rapport au plan ABC. La figure symétrique du tétraèdre SABC, par rapport à ce plan, est le tétraèdre S'ABC, qui a même base que le premier, et une hauteur égale à celle du premier. Donc ces deux tétraèdres sont équivalents.

EXERCICES

1. Démontrer directement que deux figures symétriques d'une troisième par rapport à deux plans différents sont superposables. Examiner le cas particulier où les deux plans sont parallèles.

2. *Symétrie d'un système de points.* — On appelle *axe de symétrie d'un système de points* une droite telle qu'après avoir fait tourner le système d'un certain angle autour de cette droite on obtient un second système coïncidant avec le premier. Le plus petit angle dont il faut faire tourner la figure est une partie aliquote $\frac{1}{k}$ d'un multiple de 360°. Suivant que $k = 2, 3, 4...$ l'axe se nomme *binaire, ternaire, quaternaire...* Cela posé, prouver que :

1° Tout système de points ayant un centre de symétrie et un plan de symétrie, possède un axe de symétrie qui passe par le centre et est perpendiculaire au plan de symétrie.

2° Un système de points qui a deux plans de symétrie non perpendiculaires en a un troisième.

3° Quand un système de points a deux plans de symétrie, leur intersection est un axe de symétrie.

4° Quand un système de points a un plan de symétrie et un axe de symétrie non perpendiculaire à ce plan, il a un second axe de symétrie, symétrique du premier par rapport au plan de symétrie.

5° Un système de points ayant trois axes quaternaires perpendiculaires deux à deux a aussi quatre axes ternaires.

CHAPITRE V

HOMOTHÉTIE ET SIMILITUDE

134. Il n'y a rien à changer à la définition que nous avons donnée de l'homothétie en géométrie plane.



Fig. 86.

Étant donnés (fig. 86) un point fixe S, qu'on appelle le *centre d'homothétie* et un nombre constant k, positif ou négatif, qu'on appelle

le *rapport d'homothétie,* à tout point M de l'espace on peut faire correspondre le point M′ de la droite SM défini par la relation

$$\frac{\overline{SM'}}{\overline{SM}} = k.$$

Si l'on fait décrire au point M une figure F, le point M′ décrit une certaine figure F′, qu'on appelle *figure directement* ou *inversement homothétique* à F, selon que k est positif ou négatif.

Les éléments correspondants des deux figures sont dits *homologues.*

Si $k = -1$, les deux figures F, F′ sont symétriques par rapport au point S. La symétrie par rapport à un point est donc un cas particulier de l'homothétie.

1° *Deux vecteurs homologues sont parallèles et dans le rapport k.*

2° *La figure homothétique d'une droite est une droite parallèle.*

3° *La figure homothétique d'un angle est un angle égal.*

Mêmes démonstrations qu'en géométrie plane.

4° *La figure homothétique d'un plan est un plan parallèle.*

En effet, soient (fig. 87) P un plan et S le centre d'homothétie; abaissons SA perpendiculaire sur le plan P et prenons dans ce plan un point quelconque M; puis construisons les homologues A′, M′ des points A, M. La droite A′M′ est

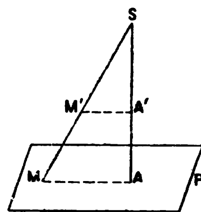


Fig. 87.

parallèle à AM, par suite, perpendiculaire à SA ; donc, si le point M décrit le plan P, le lieu du point M′, c'est-à-dire la figure homothétique du plan P, est le plan perpendiculaire à SA au point A′.

5° *La figure homothétique d'un polygone plan est un polygone plan ; les côtés homologues de ces deux polygones sont parallèles et proportionnels, et leurs angles homologues sont égaux.* D'ailleurs ces deux polygones sont *semblables*, par définition.

6° *Les tangentes à deux courbes homothétiques en deux points homologues sont parallèles.*

7° *La figure homothétique d'un cercle est un cercle. Les plans de ces deux cercles sont parallèles, leurs centres sont des points homologues et le rapport de leurs rayons est égal au rapport d'homothétie.*

8° *Pour que deux figures* F *et* F′ *soient homothétiques, il faut et il suffit qu'il existe deux points fixes* O *et* O′ *tels qu'on puisse faire correspondre les points des deux figures chacun à chacun, de façon que les vecteurs* OM, O′M′, *qui joignent ces deux points fixes à deux points correspondants quelconques* M, M′, *soient parallèles et dans un rapport constant.*

Même démonstration qu'en géométrie plane.

S'il existe un couple de points O, O′, il en existe une infinité ; car alors, les deux figures F, F′ étant homothétiques, on peut prendre pour O, O′ deux points homologues quelconques.

Dans le cas particulier où le rapport $\frac{\overline{O'M'}}{\overline{OM}}$ est égal à $+1$, les deux figures F et F′ sont égales ; on peut les

amener à coïncider au moyen de la translation représentée par le vecteur $\overline{OO'}$. Dans ce cas, on convient de dire que les deux figures F, F′ sont encore homothétiques, et que le centre d'homothétie est *à l'infini dans la direction* OO′.

9° *Deux figures* F_1, F_2 *homothétiques à une troisième figure* F_3 *sont homothétiques entre elles, en considérant comme homologues les points de* F_1 *et de* F_2 *qui correspondent à un même point de* F_3; *et, dans ce mode de correspondance, les trois centres d'homothétie sont en ligne droite. Ces trois centres d'homothétie sont ou tous trois directs, ou deux inverses et un direct.*

La figure homothétique d'une figure donnée ne fait que se déplacer parallèlement à elle-même quand on change le centre d'homothétie, en conservant le rapport d'homothétie.

Il en résulte que, pour trouver la nature, la forme et la grandeur des figures homothétiques d'une figure donnée, on peut choisir à volonté le centre d'homothétie. Ainsi :

10° *La figure homothétique d'un dièdre est un dièdre égal.* Car, si l'on prend pour centre d'homothétie un point de l'arête du dièdre, on trouve comme figure homothétique le dièdre lui-même, ou le dièdre opposé par l'arête.

11° *La figure* **directement** *homothétique d'un angle polyèdre est un angle polyèdre égal.* Car, si l'on prend pour centre d'homothétie le sommet de l'angle polyèdre, on trouve comme figure *directement* homothétique l'angle polyèdre lui-même.

Au contraire, la figure *inversement* homothétique d'un angle polyèdre est un angle polyèdre *symétrique*.

12° *La figure homothétique d'un polyèdre est un polyèdre* [4°]; *les faces homologues de ces deux polyèdres sont semblables, et les angles polyèdres homologues sont égaux ou symétriques, selon que les deux polyèdres sont directement ou inversement homothétiques.*

13° *Trois figures* F_1, F_2, F_3 *homothétiques à une quatrième figure* F_4 *sont homothétiques entre elles, en considérant comme homologues les points de* F_1, F_2, F_3 *qui correspondent à un même point de* F_4; *et, dans ce mode de correspondance, les six centres d'homothétie des quatre figures* F_1, F_2, F_3, F_4, *considérées deux à deux, sont dans un même plan, qu'on appelle plan d'homothétie, et sont les six sommets d'un quadrilatère complet.*

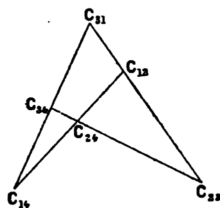


Fig. 88.

Désignons, d'une manière générale, par C_{ij} (fig. 88) le centre d'homothétie de F_i et F_j. La droite $C_{14}C_{24}$ passe par C_{12} [9°] ; de même, $C_{24}C_{34}$ passe par C_{23} et $C_{34}C_{14}$ passe par C_{31} ; donc les six centres d'homothétie sont dans le plan des trois points C_{14}, C_{24}, C_{34}. De plus [9°], les trois points C_{23}, C_{31}, C_{12} sont aussi en ligne droite; donc les six centres d'homothétie sont les sommets d'un quadrilatère complet.

Remarque. — Il peut arriver que les trois points C_{14}, C_{24}, C_{34} soient en ligne droite ; dans ce cas, les six centres d'homothétie sont en ligne droite.

SIMILITUDE

135. On dit que deux figures sont *semblables* quand on peut les placer de façon qu'elles soient *directement* homothétiques. On appelle *homologues* les éléments de ces deux figures qui se correspondent lorsque les deux figures sont placées de manière à être directement homothétiques. Nous aurons toujours soin d'énoncer *dans le même ordre* les points homologues de deux figures semblables ; ainsi, quand nous dirons que deux tétraèdres ABCD, A′B′C′D′ sont semblables, cela voudra dire qu'on peut les placer de manière qu'ils soient directement homothétiques, A′ étant l'homologue de A, B′ l'homologue de B, etc.

136. Remarque. — Nous avons dit, en géométrie plane, que deux figures *planes* sont semblables quand on peut les placer de façon qu'elles soient homothétiques, *directement ou inversement*. Pour montrer que cette définition s'accorde avec la précédente, il faut prouver que, si deux figures *planes* peuvent être placées de manière à être *inversement* homothétiques, elles peuvent aussi être placées de manière à être *directement* homothétiques, *sans modifier la correspondance des points homologues*.

En effet, soient ABC..., A′B′C′... deux figures *planes*, inversement homothétiques.

Faisons tourner la figure ABC... de 180°, dans son plan, autour d'un point O : le point A vient en A_1, B en B_1, C en C_1, etc. La figure $A_1B_1C_1$... ainsi obtenue peut être considérée comme inversement homothétique à la figure primitive ABC... par rapport au point O, le rapport d'homothétie étant égal à — 1 ; donc [134,9°]

elle est *directement* homothétique à la figure $A'B'C'...$, A_1 étant l'homologue de A', B_1 l'homologue de B', etc.

Au contraire, quand deux figures *non planes* sont inversement homothétiques, il n'est jamais possible de les placer de façon qu'elles soient directement homothétiques, en conservant la correspondance des points homologues.

137. *Deux figures semblables à une troisième sont semblables entre elles* [134,9°].

Dans deux figures semblables :

1° *Le rapport des longueurs de deux vecteurs homologues est constant* [134,1°], et s'appelle le *rapport de similitude* des deux figures.

2° *Les angles homologues sont égaux* [134,2°], *ainsi que les dièdres homologues* [134,10°] *et les angles polyèdres homologues* [134,11°].

3° *Les triangles homologues sont semblables, ainsi que les tétraèdres homologues,* car ils deviennent directement homothétiques en même temps que les deux figures.

En particulier, *dans deux polyèdres semblables, les faces homologues sont semblables,* ce qui entraîne la proportionnalité des arêtes et l'égalité des angles plans homologues, *et les angles solides homologues sont égaux,* ce qui entraîne l'égalité des dièdres homologues.

138. *Deux polyèdres semblables* P et P' (fig. 89) *peuvent être décomposés, d'une infinité de manières, en tétraèdres semblables, chacun à chacun.*

Car, si on décompose le polyèdre P en tétraèdres ABCD,

BCDE, ACDF, d'une façon quelconque, ces tétraèdres sont respectivement semblables aux tétraèdres homologues A'B'C'D', B'C'D'E', A'C'D'F', qui composent le polyèdre P'

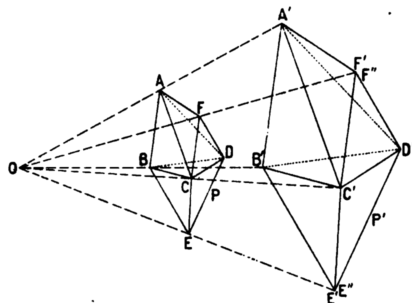


Fig. 89.

139. ***Réciproquement.*** *Si le polyèdre* P *est composé de tétraèdres* ABCD, BCDE, ACDF *respectivement semblables aux tétraèdres* A'B'C'D', B'C'D'E', A'C'D'F' *qui composent le polyèdre* P', *les deux polyèdres* P *et* P' *sont semblables.*

En effet, plaçons les deux polyèdres P et P' de façon que les tétraèdres ABCD, A'B'C'D' soient directement homothétiques par rapport à un certain point O, ce qui est possible, puisque ces deux tétraèdres sont semblables. Construisons la figure directement homothétique du polyèdre P, en prenant le point O pour centre d'homothétie et $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ pour rapport d'homothétie : A', B', C', D' seront les homologues de A, B, C, D. Soient E'', F'' les homologues de E, F ; il s'agit de prouver que E'' coïncide avec E' et F'' avec F'.

En effet, les trièdres B.CDE, B'.C'D'E'' sont égaux comme homothétiques [134, 11°] ; le trièdre B.CDE est égal au trièdre B'.C'D'E' en vertu de la similitude des tétraèdres BCDE, B'C'D'E'. Donc, les trièdres B'.C'D'E' et B'.C'D'E''

sont égaux, ce qui exige que les droites B'E', B'E'' coïncident. On en conclut que le point E'' est quelque part sur la droite B'E' ; pour une raison analogue, il est aussi sur la droite C'E' ; donc il se confond avec E'. On démontre de même que F'' coïncide avec F'.

140. **Cas de similitude.** — *Deux tétraèdres sont semblables quand ils ont un dièdre égal compris entre deux faces semblables chacune à chacune et disposées de la même façon.*

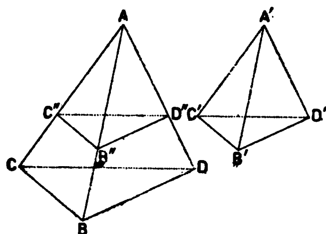


Fig. 90.

Soient (fig. 90) ABCD, A'B'C'D' deux tétraèdres. Supposons que le dièdre AB soit égal au dièdre A'B' et que les faces ABC, ABD soient respectivement semblables aux faces A'B'C', A'B'D' et *disposées de la même façon.*

Nous entendons par là que, si l'on imagine deux observateurs, l'un couché sur AB, les pieds en B, la tête du côté de A et regardant la face ACD, l'autre couché sur A'B', les pieds en B', la tête du côté de A', et regardant la face A'C'D', le premier observateur voit le point C à sa droite ou à sa gauche, selon que le second observateur voit le point C' à sa droite ou à sa gauche. Dans ces conditions, les deux trièdres A et A' sont égaux. Portons le second tétraèdre sur le premier de façon que le trièdre A' coïncide avec le trièdre A : le point B' vient en B'' sur AB, le point C' en C'' sur AC et le point D' en D'' sur AD. En vertu de la similitude des triangles ABC et A'B'C', ABD et A'B'D', on a :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'D'}{AD},$$

ou

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC} = \frac{AD''}{AD}.$$

Donc les tétraèdres ABCD, AB″C″D″ sont directement homothétiques ; par conséquent, les tétraèdres ABCD, A′B′C′D′ étaient semblables, puisqu'on a pu les placer de manière qu'ils soient directement homothétiques.

141. **Théorème.** — *Le rapport des volumes de deux polyèdres semblables est égal au cube du rapport de deux arêtes homologues.*

1° Soient (fig. 91) ABCD, A′B′C′D′ deux tétraèdres semblables. Portons le second sur le premier de façon que le trièdre A′ coïncide avec le trièdre A : le point B′ vient en B″ sur AB, le point C′ en C″ sur AC et le point D′ en D″ sur AD. Comme les angles correspondants ABC, AB″C″ sont égaux, en vertu de la similitude des tétraèdres, B″C″ est parallèle à BC ; de même, B″D″ est parallèle à BD. Donc le plan B″C″D″ est parallèle au plan BCD [17]. Menons par A la perpendiculaire commune à ces deux plans ; soient O le point où cette perpendiculaire rencontre le plan BCD, O″ le point où elle rencontre le plan B″C″D″. En désignant par V et V″ les volumes des deux tétraèdres, on a

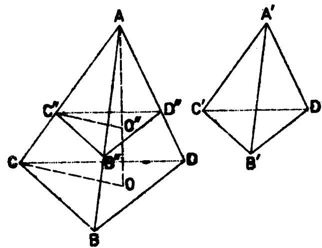


Fig. 91.

$$V = \frac{1}{3}\,BCD \times AO,$$

$$V'' = \frac{1}{3}\,B''C''D'' \times AO'';$$

d'où

$$\frac{V}{V''} = \frac{BCD}{B''C''D''} \times \frac{AO}{AO''}.$$

Mais [G.P.250] le rapport des aires des deux triangles semblables BCD, B″C″D″ est égal à $\left(\frac{BC}{B''C''}\right)^2$; de plus, les droites CO, C″O″ étant parallèles, comme intersections de deux plans parallèles par un troisième, on a :

$$\frac{AO}{AO''} = \frac{AC}{AC''} = \frac{BC}{B''C''}.$$

Donc

$$\frac{V}{V''} = \left(\frac{BC}{B''C''}\right)^2 \times \frac{BC}{B''C''} = \left(\frac{BC}{B''C''}\right)^3.$$

2° Soient P et P′ deux polyèdres semblables quelconques. Nous savons [138] que, si l'on décompose le polyèdre P d'une façon quelconque en tétraèdres T_1, T_2, T_3,..., on pourra décomposer le polyèdre P′ en tétraèdres T_1', T_2', T_3',... respectivement semblables aux précédents. Or, en désignant par a et a' deux arêtes homologues des deux polyèdres, nous venons de voir que

$$\frac{T_1}{T'_1} = \frac{T_2}{T'_2} = \frac{T_3}{T'_3} = \dots = \frac{a^3}{a'^3};$$

donc

$$\frac{T_1 + T_2 + T_3 + \dots}{T'_1 + T'_2 + T'_3 + \dots} = \frac{a^3}{a'^3},$$

ou

$$\frac{P}{P'} = \frac{a^3}{a'^3}.$$

EXERCICES

1. Deux tétraèdres sont semblables :

1° Quand ils ont une face semblable adjacente à trois dièdres égaux chacun à chacun et disposés de la même façon.

2° Quand ils ont cinq dièdres égaux chacun à chacun et disposés de la même façon;

3° Quand ils ont leurs six arêtes proportionnelles et disposées de la même façon.

2. On donne une suite illimitée de polyèdres semblables dont les arêtes homologues décroissent en progression géométrique $1, \frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^2 \ldots$, et une arête du premier est a : calculer l'arête homologue du polyèdre semblable équivalent à la *somme* (limite) de tous les polyèdres considérés.

3. On mène par les sommets d'un tétraèdre les plans parallèles aux faces opposées; on forme ainsi un second tétraèdre. Trouver le rapport des volumes de ces deux tétraèdres.

4. On inscrit à un tétraèdre un second tétraèdre ayant pour sommets les centres de gravité des faces du premier. Prouver que ces deux tétraèdres sont semblables et calculer le rapport de leurs volumes.

5. Partager une pyramide par un plan parallèle à la base en deux parties proportionnelles à m et n.

LIVRE VII

LES CORPS RONDS

CHAPITRE PREMIER

NOTIONS SUR LES SURFACES CONIQUES, CYLINDRIQUES ET DE RÉVOLUTION

142. On appelle *surface conique* toute surface engendrée par une droite, appelée *génératrice,* qui se déplace en passant constamment par un point fixe, appelé *sommet,* et en s'appuyant constamment sur une ligne fixe, appelée *directrice.* Une surface conique se compose de deux *nappes,* séparées par le sommet.

Les sections faites par des plans parallèles dans une surface conique sont homothétiques par rapport au sommet [134].

On appelle *cône* la figure limitée par une surface conique et par un plan qui la coupe suivant une courbe fermée. La section faite par ce plan est la *base* du cône, la distance de ce plan au sommet est la *hauteur* du cône, et la portion de la surface conique comprise entre le sommet et la base est la *surface latérale* du cône. Dans le cas où la base est une courbe à centre, par exemple, un cercle, on dit que le cône est *droit* ou *oblique,* selon que la droite qui joint le sommet au centre de la base est perpendiculaire ou non au plan de la base.

On dit qu'une pyramide est *inscrite* à un cône quand elle a pour sommet le sommet du cône et pour base un polygone inscrit à la base du cône.

On emploie aussi le mot *cône* pour désigner une surface conique.

143. On appelle *surface cylindrique* toute surface engendrée par une droite, appelée *génératrice*, qui se déplace en restant parallèle à une direction donnée et en s'appuyant constamment sur une ligne fixe appelée *directrice*. On peut considérer une surface cylindrique comme la limite d'une surface conique dont le sommet s'est éloigné à l'infini dans une certaine direction.

Les sections faites dans une surface cylindrique par des plans parallèles entre eux et non parallèles aux génératrices sont égales; car on peut les faire coïncider au moyen d'une translation.

On appelle *section droite* d'une surface cylindrique, toute section faite par un plan perpendiculaire aux génératrices.

On appelle *cylindre* la figure limitée par une surface cylindrique ayant pour directrice une courbe fermée et par deux plans parallèles, non parallèles aux génératrices. Les sections faites par ces plans sont les *bases*, la distance de ces plans est la *hauteur*, et la portion de la surface cylindrique comprise entre ces deux plans est la *surface latérale* du cylindre. On dit que le cylindre est *droit* ou *oblique* selon que ses génératrices sont ou non perpendiculaires aux plans des bases.

On dit qu'un prisme est *inscrit* à un cylindre quand il a pour arêtes latérales des génératrices de la surface latérale du cylindre, et pour bases des polygones inscrits aux bases du cylindre.

[illegible] pour désigner une [illegible]

[illegible] *tion* toute surface [illegible], appelée *généra-* [illegible] uvement [95], tout [illegible] ercle dont le plan [illegible] centre est sur cet [illegible] *ctions faites dans* [illegible] *perpendiculaires* [illegible] *es sur l'axe :* ces [illegible] la surface. Il en [illegible] ut être considérée [illegible] le dont le centre [illegible] plan reste perpen- [illegible] n varie de manière [illegible] t une ligne fixe, [illegible]

[illegible] ites dans une sur- [illegible] nt par l'axe.

[illegible] on peut les faire [illegible] ur de l'axe.

[illegible] révolution comme [illegible] s méridiens tour- [illegible]

[illegible] en est une droite [illegible] *face conique de* [illegible]

[illegible] llèle à l'axe, on a [illegible]

[illegible] nt son centre sur [illegible] *hère.*

4° Si le méridien est un cercle quelconque, la surface engendrée s'appelle *tore*.

PLAN TANGENT. NORMALE.

145. Les tangentes en un point d'une surface à toutes les lignes que l'on peut tracer par ce point sur la surface sont, *en général*, dans un même plan, qu'on appelle *le plan tangent à la surface en ce point.*

Nous allons démontrer cette proposition pour les surfaces coniques, cylindriques et de révolution (*).

1° Soient A un point d'une surface conique (fig. 92) ou cylindrique (fig. 93); Γ une courbe tracée par ce point sur la

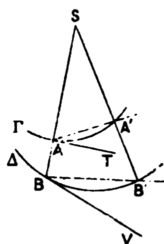


Fig. 92.

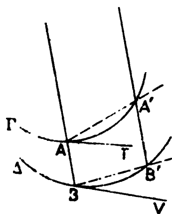


Fig. 93.

surface; Δ la directrice de la surface; B le point de rencontre de cette directrice avec la génératrice passant par A. Prenons sur la courbe Γ un second point A', et soit B' le point de rencontre de la génératrice passant par ce point avec la directrice Δ. Les deux génératrices AB, A'B' passent par le sommet S, si la surface est conique; elles sont parallèles, si la surface est cylindrique. Dans les deux cas, elles déterminent un plan, qui contient les deux droites AA' et BB'. Supposons que la génératrice A'B' se rapproche indéfiniment de la génératrice AB : les deux droites AA', BB' ont pour limites respec-

(*) Voir, pour la démonstration générale, le *Cours de Géométrie analytique* de M. Niewenglowski, t. III, p. 120.

tives les tangentes AT, BV aux deux courbes Γ, Δ; comme les deux droites AA′, BB′ n'ont pas cessé d'être dans un même plan, on en conclut que les tangentes AT, BV sont encore dans un même plan. En d'autres termes, la tangente en A à toute courbe tracée par ce point sur la surface est dans le plan ABV déterminé par la génératrice AB et par la tangente en B à la directrice.

Ce plan est, par définition, le plan tangent à la surface au point A; il est indépendant de la position du point A sur la génératrice. D'où ce théorème :

Le plan tangent à une surface conique ou cylindrique est le même en tous les points d'une génératrice. Cette génératrice s'appelle *la génératrice de contact.*

Remarque. — S'il s'agit d'une surface conique, le raisonnement est en défaut dans le cas où le point A coïncide avec le sommet; en effet, le lieu des tangentes au sommet à toutes les courbes tracées par ce point sur la surface est, non pas un plan, mais la surface conique elle-même.

2° Soient (fig. 94) A un point d'une surface de révolution dont l'axe est XY; Γ une courbe tracée par ce point sur la surface. Prenons sur cette courbe un second point B, et soient C le point de rencontre du parallèle passant par A avec le méridien passant par B, et D le point de rencontre du parallèle passant par B avec le méridien passant par A. On peut amener la droite BC à coïncider avec la droite DA par une rotation autour de l'axe XY; donc ces deux droites rencontrent l'axe en un même point, ou lui sont parallèles. Dans les deux cas, elles déterminent un plan, qui contient les trois droites AB, AC, AD.

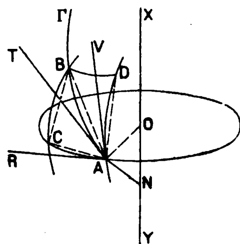


Fig. 94.

Supposons que le méridien BC se rapproche indéfiniment du méridien DA; les trois droites AB, AC, AD ont pour limites respectives les tangentes AT, AR, AV à la courbe Γ, au

parallèle AC et au méridien AD. Comme ces trois droites n'ont pas cessé d'être dans un même plan, on en conclut que les trois tangentes AT, AR, AV sont encore dans un même plan. En d'autres termes, la tangente en A à toute courbe tracée par ce point sur la surface est dans le plan RAV déterminé par les tangentes en A au parallèle et au méridien passant par ce point.

Ce plan est, par définition, le plan tangent à la surface au point A. Il est perpendiculaire au plan méridien AXY, car il contient la tangente AR au parallèle, qui est perpendiculaire à deux droites de ce plan, savoir au rayon OA du parallèle et à l'axe XY. D'où ce théorème :

Le plan tangent en un point d'une surface de révolution est perpendiculaire au plan méridien qui passe par ce point.

REMARQUE. — Le raisonnement est en défaut dans le cas où le point A est sur l'axe; le lieu des tangentes en ce point aux courbes tracées par ce point sur la surface est alors, en général, un cône de révolution, qui ne se réduit à un plan que si la courbe méridienne coupe en ce point l'axe sous un angle droit.

146. On appelle *normale* en un point d'une surface la perpendiculaire menée par ce point au plan tangent en ce point.

1° *Les normales à une surface conique ou cylindrique aux différents points d'une même génératrice sont parallèles*; car le plan tangent est le même en tous ces points [145].

2° *La normale en un point d'une surface de révolution est contenue dans le plan méridien qui passe par ce point;* car le plan tangent est perpendiculaire à ce plan méridien. Par conséquent, *toute normale à une surface de révolution rencontre l'axe, ou lui est parallèle, et les normales aux différents points d'un même parallèle forment un cône ou un cylindre de révolution, ayant pour axe l'axe de la surface.*

EXERCICES

1. Il existe quatre cônes de révolution tangents aux trois faces d'un trièdre OABC : l'un est *inscrit* à ce trièdre et a pour axe la droite d'intersection des plans bissecteurs des dièdres de ce trièdre ; les trois autres sont respectivement inscrits aux trièdres OA'BC, OAB'C, OABC', en appelant OA', OB', OC' les prolongements des arêtes OA, OB, OC, au delà du sommet ; on dit aussi qu'ils sont *exinscrits* au trièdre primitif OABC.

Appelons a, b, c les faces du trièdre OABC et σ la demi-somme de ces faces ; soient OD, OE les génératrices de contact du plan AOB avec les cônes respectivement inscrits aux trièdres OABC, OA'BC. On a :

$$\widehat{AOD} = \sigma - a,$$

$$\widehat{AOE} = \sigma,$$

$$\widehat{BOE} = \sigma - c,$$

$$\widehat{DOE} = a, \text{ etc.}$$

Ces formules se démontrent exactement de la même manière que les formules analogues relatives aux cercles inscrit et exinscrits à un triangle. [G. P. 85.]

2. Étant donnés un cylindre de révolution et un cône de révolution dont l'axe est une génératrice du cylindre, démontrer que tous les points communs à ces deux surfaces sont équidistants d'un point fixe. (Mannheim.)

3. Construire un cylindre ou un cône de révolution, connaissant : 1° trois génératrices ; 2° trois plans tangents ; 3° deux génératrices et un plan tangent ; 4° deux plans tangents et une génératrice ; 5° l'axe et un plan tangent ; 6° une section circulaire et un point de la surface.

4. Trouver le lieu des points de l'espace dont le rapport des distances à deux droites parallèles données soit égal à un rapport donné.

5. Étant donnés dans l'espace trois points fixes, A, B, C, on considère un quatrième point variable S ; soit MNPQ le parallélogramme qui a pour sommets les milieux des côtés du quadrilatère gauche SABC. Trouver le lieu du point S dans les trois cas suivants :

1° Le rapport des diagonales du parallélogramme MNPQ reste constant ;

2° L'aire de ce parallélogramme reste constante ;

3° Ce parallélogramme reste semblable à un parallélogramme donné. (Saint-Cyr, 1896.)

CHAPITRE II

CYLINDRE ET CONE DE RÉVOLUTION : AIRE DE LA SURFACE LATÉRALE, DÉVELOPPEMENT, VOLUME

CYLINDRE DE RÉVOLUTION

147. Un cylindre droit à base circulaire peut être considéré comme engendré par un rectangle OO'A'A (fig. 95) tournant autour de l'un de ses côtés ; c'est pourquoi on lui donne d'ordinaire le nom de *cylindre de révolution.* Le côté fixe OO' est la hauteur du cylindre ; le côté opposé engendre la surface latérale ; les deux autres côtés OA, O'A' engendrent les bases. Nous désignerons par h la hauteur du cylindre et par r le rayon des bases.

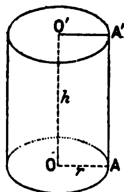


Fig. 95.

148. Définition. — On appelle *aire de la surface latérale d'un cylindre de révolution la limite vers laquelle tend l'aire de la surface latérale d'un prisme régulier* (*) *inscrit,* ABCDEFA'B'C'D'E'F' (fig. 96), *lorsque le nombre des côtés de la base de ce prisme augmente indéfiniment.*

Nous allons démontrer que cette limite existe et en trouver l'expression.

(*) Tout prisme inscrit à un cylindre de révolution est droit; donc, pour qu'il soit régulier, il faut et il suffit que sa base soit un polygone régulier.

Soit n le nombre des côtés de la base du prisme; la surface latérale de ce prisme se compose de n rectangles égaux, tels que ABB'A'; donc son aire est égale à

$$n\text{AB} \times \text{AA}', \quad \text{ou} \quad n\text{AB} \times h.$$

Or, si n augmente indéfiniment, nAB, qui représente le périmètre du polygone ABCDEF, a pour limite la longueur de la circonférence de base du cylindre, c'est-à-

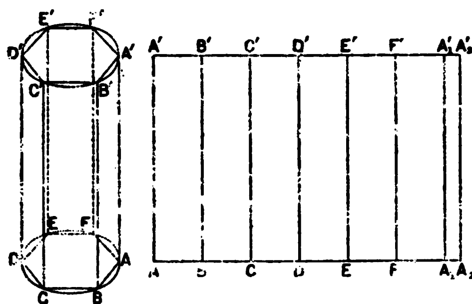


Fig. 96.

dire $2\pi r$; donc l'aire de la surface latérale du prisme a pour limite $2\pi rh$. C'est cette limite que nous appelons l'aire de la surface latérale du cylindre; en la désignant par s, on a :

$$s = 2\pi rh.$$

149. Développement. — Supposons la surface latérale du prisme fendue suivant l'arête AA', et amenons la face ABB'A' dans le plan de la face BCC'B', par une rotation autour de BB', de manière que ces deux faces forment un rectangle unique ayant pour hauteur AA' et pour base AB + BC; puis faisons tourner ce rectangle autour de CC', de manière à l'amener dans le plan de la face suivante CDD'C'; et ainsi de suite, jusqu'à ce que toutes les faces se trouvent juxtaposées dans un même plan. On obtient ainsi un rectangle $\text{AA}_1\text{A}_1'\text{A}'$,

qui a pour hauteur la hauteur du prisme, ou du cylindre, et pour base le périmètre de la base du prisme. Si maintenant on suppose que le nombre des côtés de la base du prisme augmente indéfiniment, AA_1 a pour limite la longueur $2\pi r$ de la circonférence de base du cylindre, et le rectangle $AA_1A_1'A'$ a pour limite un rectangle $AA_2A_2'A'$ ayant pour base $2\pi r$ et pour hauteur h. C'est ce rectangle limite qu'on appelle le *développement de la surface latérale du cylindre.*

150. Définition. — On appelle *volume d'un cylindre de révolution, la limite vers laquelle tend le volume d'un prisme régulier inscrit* ABCDEFA′B′C′D′E′F′ (fig. 96), *lorsque le nombre des côtés de la base de ce prisme augmente indéfiniment.*

Nous allons démontrer que cette limite existe et en trouver l'expression. En effet, le volume du prisme est égal au produit de sa base par sa hauteur. Si le nombre de côtés de la base du prisme augmente indéfiniment, l'aire de cette base a pour limite celle du cercle de base du cylindre, c'est-à-dire πr^2 ; la hauteur du prisme est constamment égale à celle du cylindre, que nous avons appelée h ; donc le volume du prisme a pour limite $\pi r^2 h$. C'est cette limite que nous appelons le volume du cylindre ; en le désignant par v, on a

$$v = \pi r^2 h.$$

CONE DE RÉVOLUTION

151. Un cône droit à base circulaire peut être considéré comme engendré par un triangle rectangle SOA (fig. 97), en tournant autour de l'un des côtés de l'angle droit ; c'est pourquoi on lui donne d'ordinaire le nom de *cône de révolution.* Le côté fixe SO est la hauteur du cône ;

l'autre côté de l'angle droit OA engendre la base du cône, et l'hypoténuse SA engendre la surface latérale.

Nous désignerons par h la hauteur du cône, par r le rayon de la base, et par a la génératrice ou l'*arête* SA.

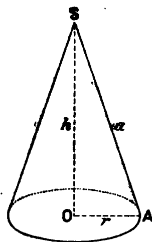


Fig. 97.

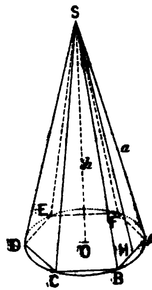


Fig. 98.

152. Définition. — On appelle *aire de la surface latérale d'un cône de révolution, la limite vers laquelle tend l'aire de la surface latérale d'une pyramide régulière* (*) *inscrite* SABCDEF (fig. 98), *lorsque le nombre des côtés de la base de cette pyramide augmente indéfiniment.*

Soit n le nombre des côtés de la base de la pyramide ; la surface latérale de cette pyramide se compose de n triangles égaux, tels que SAB ; donc son aire est égale à

$$n\text{AB} \times \frac{1}{2}\text{SH},$$

SH étant la hauteur du triangle SAB.

Or, si n augmente indéfiniment, nAB, qui représente le périmètre du polygone ABCDEF, a pour limite la longueur de la circonférence de base du cône, c'est-à-dire

(*) Pour qu'une pyramide inscrite à un cône de révolution soit régulière, il faut et il suffit que sa base soit un polygone régulier

$2\pi r$; d'ailleurs, SH a pour limite l'arête SA ou a, car la différence SA — SH étant moindre que AH, c'est-à-dire moindre que $\frac{1}{2}$ AB, tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment; donc l'aire de la surface latérale de la pyramide a pour limite :

$$2\pi r \times \frac{1}{2} a \quad \text{ou} \quad \pi r a.$$

C'est cette limite que nous appelons l'aire de la surface latérale du cône ; en la désignant par s, on a

$$s = \pi r a.$$

153. Développement. — Supposons la surface latérale de la pyramide fendue suivant l'arête SA, et amenons la face SAB dans le plan de la face SBC, par une rotation autour de SB, de manière que ces deux faces forment un quadrilatère SABC; puis faisons tourner ce quadrilatère autour de SC, de manière à l'amener dans le plan de la face suivante SCD; et ainsi de suite, jusqu'à ce que toutes les faces se trouvent juxtaposées dans un même plan, de manière à former un secteur polygonal $SABCDEFA_1$ (fig. 99). Comme

$$SA = SB = SC = \ldots = a,$$

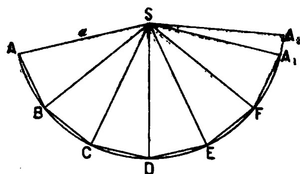


Fig. 99.

les points A, B, C,... A_1 se placent sur un cercle de centre S et de rayon a. Si maintenant on suppose que le nombre des côtés de la base de la pyramide augmente indéfiniment, la longueur de la ligne brisée régulière $ABCDEFA_1$ a pour limite la longueur $2\pi r$ de la circonférence de base du cône; donc le point A_1 a pour limite le point A_2 de la circonférence (SA), tel que l'arc AA_2 soit égal à $2\pi r$; donc le secteur polygonal $SABCDEFA_1$ a pour limite le secteur circulaire SAA_2. C'est ce secteur circulaire qu'on appelle le *développement de la surface latérale du cône*.

Pour le construire commodément, il convient de calculer

l'angle ASA_2 ; en appelant n le nombre de degrés que contient cet angle, on a

$$\frac{2\pi an}{360} = \text{arc } AA_2 = 2\pi r,$$

d'où

$$n = \frac{r}{a} \times 360.$$

154. Définition. — On appelle *volume d'un cône de révolution, la limite vers laquelle tend le volume d'une pyramide régulière inscrite* SABCDEF (fig. 98), *lorsque le nombre des côtés de la base de cette pyramide augmente indéfiniment.*

Le volume de la pyramide est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur. Si le nombre des côtés de la base de la pyramide augmente indéfiniment, l'aire de cette base a pour limite celle du cercle de base du cône, c'est-à-dire πr^2 ; la hauteur de la pyramide est constamment égale à celle du cône, que nous avons appelée h ; donc le volume de la pyramide a pour limite $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. C'est cette limite que nous appelons le volume du cône ; en le désignant par v, on a :

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

TRONC DE CÔNE DE RÉVOLUTION

155. On appelle *tronc de cône de révolution* (fig. 100 et 103), la figure limitée par une surface conique de révolution et par deux plans perpendiculaires à l'axe.

On dit que le tronc est *de première* ou *de seconde espèce*, selon que ces deux plans sont ou non du même côté du sommet.

Un tronc de cône de révolution de première espèce peut être considéré comme engendré par un trapèze OO'A'A (fig. 100), rectangle en O et O', tournant autour

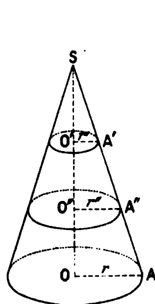


Fig. 100.

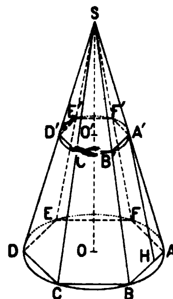


Fig. 101.

du côté OO'. Ce côté s'appelle la *hauteur* du tronc; les côtés parallèles OA, O'A' engendrent les *bases* du tronc; le côté oblique AA' engendre la *surface latérale* du tronc.

Nous désignerons par h la hauteur OO'; par r, r' les rayons OA, O'A' des bases; par a la génératrice ou l'*arête* AA'.

156. *La surface latérale du tronc de cône est la différence entre les surfaces latérales des deux cônes* SOA, SO'A'.

Inscrivons au cône SOA une pyramide régulière SABCDEF (fig. 101), et soit A'B'C'D'E'F' la section faite dans cette pyramide par le plan de la base supérieure du tronc.

Les aires des surfaces latérales des deux cônes étant les limites vers lesquelles tendent les aires des surfaces latérales des pyramides SABCDEF, SA'B'C'D'E'F', lorsque le nombre des côtés des bases de ces pyramides augmente indéfiniment, l'aire de la surface latérale du tronc

de cône est la limite de l'aire de la surface latérale du tronc de pyramide ABCDEFA'B'C'D'E'F'.

Soit n le nombre des côtés du polygone ABCDEF ; la surface latérale du tronc de pyramide se compose de n trapèzes égaux, tels que ABB'A' ; donc son aire est égale à

$$(n\text{AB} + n\text{A'B'}) \times \frac{1}{2}\,\text{A'H},$$

A'H étant la hauteur du trapèze ABB'A'.

Or, si n augmente indéfiniment, nAB et nA'B', qui représentent les périmètres des polygones ABCDEF, A'B'C'D'E'F', ont pour limites respectives les longueurs $2\pi r$ et $2\pi r'$ des circonférences de bases du tronc de cône ; d'ailleurs A'H a pour limite l'arête A'A ou a ; donc l'aire de la surface latérale du tronc de pyramide a pour limite :

$$(2\pi r + 2\pi r') \times \frac{1}{2}\,a, \quad \text{ou} \quad \pi.(r + r')\,a.$$

C'est cette limite qui est l'aire de la surface latérale du tronc de cône ; en la désignant par s, on a

$$s = \pi\,(r + r')\,a.$$

157. Remarque. — Dans le trapèze OAA'O' (fig. 100), la droite O''A'' qui joint les milieux des côtés non parallèles est égale à la demi-somme des bases ; donc, en désignant cette droite par r'', on a

$$r + r' = 2\,r'';$$

par suite,

$$s = 2\pi r''a.$$

Or, $2\pi r''$ est la longueur de la circonférence obtenue

en coupant le tronc de cône par le plan équidistant des deux bases; d'où ce théorème :

L'aire de la surface latérale d'un tronc de cône de révolution de première espèce est égale au produit de l'arête du tronc par la longueur de la circonférence de la section équidistante des deux bases.

Les développements des surfaces latérales des deux cônes SOA, SO'A' sont des secteurs circulaires (fig. 102) SAA_1, $SA'A_1'$ correspondant à un même angle au centre α défini par l'égalité

$$\frac{\alpha}{360^{\circ}} = \frac{r}{SA} = \frac{r'}{SA'}.$$

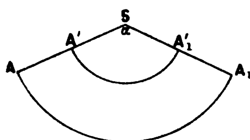


Fig. 102.

Donc, le développement du tronc de cône est la portion de couronne circulaire $AA_1A_1'A'$.

158. *Le volume du tronc de cône est la différence entre les volumes des deux cônes;* or, les volumes des deux cônes sont les limites vers lesquelles tendent les volumes des deux pyramides SABCDEF, SA'B'C'D'E'F', lorsque le nombre des côtés des bases de ces pyramides augmente indéfiniment; donc le volume du tronc de cône est la limite du volume du tronc de pyramide ABCDEF A'B'C'D'E'F'.

Soient b, b' les bases de ce tronc de pyramide, h sa hauteur, qui est celle du tronc de cône; son volume est égal à

$$\frac{1}{3} h (b + b' + \sqrt{bb'}).$$

Lorsque le nombre des côtés des bases augmente indéfiniment, b et b' ont pour limites respectives les aires πr^2,

$\pi r'^2$ des cercles de bases du tronc de cône. Donc le volume du tronc de pyramide a pour limite

$$\frac{1}{3} h\,(\pi r^2 + \pi r'^2 + \sqrt{\pi r^2 . \pi r'^2}),$$

ou

$$\frac{1}{3} \pi h\,(r^2 + rr' + r'^2).$$

C'est cette limite qui est le volume du tronc de cône ; en le désignant par v, on a

$$v = \frac{1}{3} \pi h\,(r^2 + r'^2 + rr'),$$

ou encore

$$v = \frac{1}{12} \pi h\,[3\,(r + r')^2 + (r - r')^2].$$

159. Le volume d'un tronc de cône *de seconde espèce* (fig. 103) est la somme des volumes des deux cônes SOA, SO'A'. En le considérant comme la limite d'un tronc de pyramide inscrit *de seconde espèce*, on trouve, comme ci-dessus, que son volume v a pour expression :

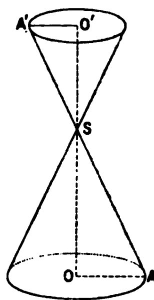


Fig. 103.

$$v = \frac{1}{3} \pi h\,(r^2 + r'^2 - rr').$$

160. On peut aussi évaluer le volume v d'un tronc de cône de première ou de seconde espèce, en calculant les volumes des deux cônes SOA, SO'A', dont il est la somme ou la différence. Soient x, x' les hauteurs de ces deux cônes; on a

$$v = \frac{1}{3} \pi\,(r^2 x - \varepsilon r'^2 x'), \quad \text{et} \quad x - \varepsilon x' = h,$$

ε étant égal à $+1$ ou à -1 selon que le tronc est de première ou de seconde espèce.

Or

$$\frac{x}{r} = \frac{x'}{r'} = \frac{h}{r - \varepsilon r'},$$

d'où

$$x = \frac{rh}{r - \varepsilon r'}, \quad x' = \frac{r'h}{r - \varepsilon r'}.$$

En portant dans l'expression de v, on trouve

$$v = \frac{1}{3} \pi h \frac{r^3 - \varepsilon r'^3}{r - \varepsilon r'},$$

ou

$$v = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + \varepsilon r r' + r'^2).$$

EXERCICES

1. Le litre à mesurer les grains a la forme d'un cylindre de révolution dont la hauteur est égale au diamètre; dans le litre à mesurer les liquides la hauteur est double du diamètre. Calculer les dimensions de ces deux mesures à un millimètre près.

2. Calculer le rayon intérieur d'un tube de verre cylindrique qui pèse vide 90 gr. et pèse 200 gr. quand on y a introduit une colonne de mercure de 9 centimètres, la densité du mercure étant 13,568.

3. Pour extraire l'eau d'un puits on fait usage d'une pompe dont le tube a un diamètre intérieur d et dont le piston a une course égale à h. Le diamètre du puits est D et la profondeur de l'eau H. Après combien de courses du piston pourra-t-on vider le puits ?

4. On plonge dans un liquide de densité d un tronc de cône homogène de densité δ ; les rayons des bases sont R, r, et la hauteur h. Calculer la hauteur de la partie plongée et le diamètre de la section faite par le plan du niveau du liquide.

5. Calculer les rayons des bases d'un tronc de cône dont on connaît la hauteur, l'arête et la surface ou le volume.

6. Rapport des volumes engendrés par un parallélogramme tournant successivement autour de deux côtés adjacents.

7. Partager la surface latérale d'un cône ou d'un tronc de cône de révolution en deux parties égales par un plan parallèle aux bases.

8. Inscrire à un cône un cylindre de volume maximum, ou inversement, circonscrire à un cylindre un cône de volume minimum.

9. Maximum du volume d'un cône de révolution d'arête donnée.

10. Maximum de la surface d'un cylindre inscrit à un cône de révolution.

11. Trouver le cylindre maximum de surface totale donnée.

12. Même question pour le cône.

13. Un cône de révolution est inscrit à un cylindre de révolution. Couper la figure par un plan parallèle à la base, de façon que les surfaces du tronc de cône et du tronc de cylindre obtenus soient dans un rapport donné.

CHAPITRE III

PREMIÈRES NOTIONS SUR LA SPHÈRE

161. On appelle *surface sphérique* le lieu des points équidistants d'un point fixe, appelé *centre*. Les portions de droites qui joignent le centre aux divers points de cette surface s'appellent *rayons ;* tous les rayons sont égaux, en vertu de la définition.

On appelle *corde* une portion de droite qui joint deux points de la surface sphérique ; *diamètre*, une corde passant par le centre ; tous les diamètres sont égaux, car chacun d'eux est la somme de deux rayons.

162. On dit que deux points d'une surface sphérique, ou deux figures tracées sur une surface sphérique, sont *diamétralement opposés* ou, plus simplement, *opposés*, quand ils sont symétriques par rapport au centre de la sphère.

163. Toute surface sphérique partage l'espace en deux régions : la région *intérieure*, qui comprend le centre et dont tous les points sont à une distance du centre moindre

que le rayon, et la région *extérieure*, dont tous les points sont à une distance du centre plus grande que le rayon.

164. Toute surface sphérique peut être considérée comme engendrée par une demi-*circonférence* ABC (fig. 104) tournant autour du diamètre AC qui la limite ; le centre O de cette demi-circonférence est le centre de la sphère et son rayon est égal à celui de la sphère.

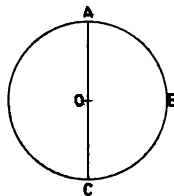


Fig. 104.

165. On appelle *sphère* la région intérieure à une surface sphérique ; une sphère peut être considérée comme engendrée par un demi-*cercle* AOCB, tournant autour du diamètre AC.

On emploie aussi le mot *sphère* pour désigner une surface sphérique, de même qu'on emploie le mot *cercle* pour désigner une circonférence.

166. *Toute section faite dans une sphère par un plan passant par le centre est un cercle ayant même centre et même rayon que la sphère.* Si l'on fait tourner ce cercle autour d'un quelconque de ses diamètres, il engendre la sphère.

POSITIONS RELATIVES D'UNE SPHÈRE ET D'UNE DROITE OU D'UN PLAN. TANGENTES. PLANS TANGENTS

167. **Théorème.** — *Une droite rencontre une sphère en deux points, ou en un point, ou ne la rencontre pas, selon que la distance de cette droite au centre de la sphère est inférieure, égale, ou supérieure au rayon.*

Ce théorème est une conséquence du théorème analogue de géométrie plane [G.P. 78], relatif à l'intersection d'une droite et d'un cercle. Car, pour qu'un point soit commun à une droite et à une sphère, il faut et il suffit qu'il soit commun à la droite et au cercle obtenu en coupant la sphère par le plan passant par la droite et le centre de la sphère.

168. On dit qu'une droite est *tangente* à une sphère lorsqu'elle n'a qu'un point commun avec cette sphère ; ce point s'appelle le *point de contact.*

Il résulte du théorème précédent que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite soit tangente à une sphère, est qu'elle soit perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon.*

169. **Théorème.** — *Un plan coupe une sphère suivant un cercle, ou la rencontre en un point unique, ou ne la rencontre pas, suivant que la distance du centre de la sphère à ce plan est inférieure, égale ou supérieure au rayon de la sphère.*

Soient (fig. 105, 106 et 107) O le centre d'une sphère

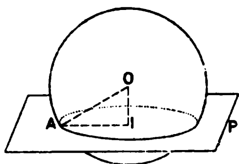


Fig. 105.

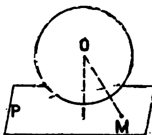


Fig. 106.

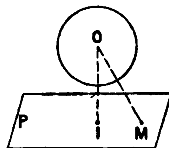


Fig. 107.

de rayon R, P un plan, et OI la distance du centre à ce plan.

1° Si $OI < R$ (fig. 105), le point I est intérieur à la sphère ; donc toutes les droites du plan P passant par I

rencontrent chacune la sphère en deux points. Le plan P a donc une infinité de points communs avec la sphère ; le lieu de ces points est un cercle de centre I, car tous ces points sont équidistants de O, par suite, équidistants du pied I de la perpendiculaire OI.

Soit A l'un de ces points ; dans le triangle rectangle OIA, on a

$$\overline{IA}^2 = R^2 - \overline{OI}^2;$$

donc le rayon IA de la section faite dans la sphère par le plan P va en décroissant à mesure que le plan P s'éloigne du centre de la sphère.

Si le plan P passe par le centre de la sphère, $OI = 0$; donc $IA = R$, ce que nous savions déjà [166]. On dit alors que la section est un *grand cercle*.

Si le plan P ne passe pas par le centre de la sphère, le rayon IA de la section est moindre que R ; on dit alors que la section est un *petit cercle*.

2° Si $OI = R$ (fig. 106), le point I est sur la sphère ; mais tout autre point M du plan P est extérieur à la sphère, car $OM > OI$.

3° Si $OI > R$ (fig. 107), le point I est extérieur à la sphère, et il en est de même, à plus forte raison, de tout autre point M du plan P, car $OM > OI > R$.

170. On dit qu'un plan est *tangent* à une sphère lorsqu'il n'a qu'un point commun avec cette sphère ; ce point s'appelle *le point de contact*.

Il résulte du théorème précédent que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un plan soit tangent à une sphère, c'est qu'il soit perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon.*

171. La *normale* [146] en un point d'une sphère, c'est-à-dire la perpendiculaire au plan tangent en ce point, se confond avec le rayon mené par ce point.

172. *Toutes les droites tangentes à une sphère en un point* I (fig. 106) *sont dans le plan tangent à la sphère en ce point; car elles sont perpendiculaires à l'extrémité du rayon* OI.

Réciproquement, *toute droite située dans un plan tangent à une sphère et passant par le point de contact est tangente à la sphère.*

173. Les tangentes en un point d'une sphère à tous les cercles obtenus en coupant la sphère par des plans passant par ce point n'ont que ce point de commun avec la sphère; donc elles sont tangentes à la sphère et, par suite, elles sont dans le plan tangent à la sphère en ce point. Par conséquent,

La tangente en un point d'une section plane d'une sphère est l'intersection du plan de la section avec le plan tangent en ce point.

174. Plus généralement, *les tangentes en un point d'une sphère à toutes les courbes tracées sur la sphère et passant par ce point sont dans le plan tangent à la sphère en ce point.* Cela résulte de ce que la sphère est une surface de révolution [145]; mais il est bon de le démontrer directement.

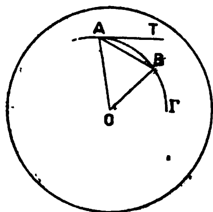


Fig. 108.

Soit (fig. 108) AT la tangente en un point A d'une courbe Γ tracée sur une sphère de centre O; il s'agit de prouver que

l'angle OAT est droit. En effet, soit B un second point de Γ ; dans le trièdre A.OBT, l'angle OAT est plus petit que la somme des deux angles OAB, BAT et plus grand que leur différence :

$$\left| \widehat{OAB} - \widehat{BAT} \right| < \widehat{OAT} < \widehat{OAB} + \widehat{BAT}.$$

Or, si l'on suppose que le point B se rapproche indéfiniment de A, l'angle BAT tend vers zéro, par hypothèse, et l'angle OAB, qui a pour complément la moitié de l'angle AOB, a pour limite un angle droit. Donc la somme et la différence des angles OAB et BAT ont pour limite commune un angle droit ; il en résulte que l'angle OAT est droit.

175. Étant donnés (fig. 109) une sphère de centre O et un point extérieur A, menons par la droite AO un plan quelconque ; ce plan coupe la sphère suivant un grand cercle CBD. Menons par A une tangente AB à ce cercle, et faisons tourner le demi-cercle CBD et la tangente AB autour de AO.

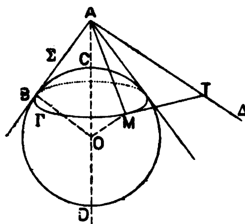


Fig. 109.

Le demi-cercle CBD engendre la sphère ; la droite AB reste constamment tangente à la sphère et engendre un cône de révolution Σ ; le point de contact B engendre un cercle Γ, commun à la sphère et au cône Σ. Toutes les génératrices de ce cône sont tangentes à la sphère.

Réciproquement, toutes les tangentes à la sphère issues de A sont des génératrices de ce cône. Car, si M est le point de contact de l'une d'elles, les triangles rectangles ABO, AMO sont égaux, comme ayant l'hypoté-



[illegible] gal : OB = OM ; [illegible] le triangle AMO [illegible] conséquent, AM [illegible] par AB en tour- [illegible]

[illegible] *un même point,* [illegible] *un cône de révo-* [illegible] *oint ce point au* [illegible]

[illegible] *t tangent à la* [illegible] la sphère en un [illegible] AM et la tan- [illegible]

[illegible] *nts à la sphère* [illegible] M est le point [illegible] t une tangente à [illegible] t sur le cercle Γ [illegible] n ce point à la [illegible] cident.

[illegible] est *circonscrit* [illegible] sphère est *ins-* [illegible] *e cercle* Γ, qu'on [illegible] *act.* On dit aussi [illegible] *eloppe* des plans [illegible] ssus de A.

[illegible] s'éloigne indéfi- [illegible] re CD (fig. 110), [illegible] les génératrices [illegible] ontact Γ devient [illegible] où ce théorème :

Le lieu des tangentes à une sphère parallèles à un diamètre et l'enveloppe des plans tangents parallèles à ce même diamètre est un cylindre de révolution ayant pour axe ce diamètre.

On peut d'ailleurs démontrer directement ce théorème, en raisonnant comme dans le cas du cône.

178. PROBLÈME. — *Mener par une droite* Δ (fig. 109 et 110) *un plan tangent à une sphère donnée* O.

MÉTHODE DU CÔNE. — Supposons le problème résolu ; soit M (fig. 109) le point de contact d'un plan P passant par Δ et tangent à la sphère. Considérons le cône circonscrit à la sphère et ayant pour sommet un point arbitraire A de la droite Δ ; soit T le point d'intersection (*) de la droite Δ avec le plan du cercle de contact Γ. La droite MT est tangente à la sphère en M, par suite, tangente au cercle Γ ; donc, pour obtenir le point M, il suffit de mener par T une tangente au cercle Γ. Réciproquement, si M est le point de contact d'une tangente au cercle Γ issue de T, le plan AMT répond à la question ; car il contient la droite Δ et il est tangent à la sphère, puisqu'il contient les deux tangentes AM et MT.

DISCUSSION. — Si la droite Δ est extérieure à la sphère, il en est de même du point T; donc on peut mener par ce point deux tangentes au cercle Γ et le problème a deux solutions. Si la droite Δ est tangente à la sphère en un point M, il n'y a plus qu'une solution : le plan tangent à la sphère en ce point. Enfin, si la droite Δ rencontre la sphère en deux points, le problème est évidemment impossible.

MÉTHODE DU CYLINDRE. — Si le point A s'éloigne indéfiniment sur la droite Δ, le cône circonscrit devient un cylindre

(*) Si le plan du cercle Γ est parallèle à Δ, le point T n'existe plus; mais alors, la tangente en M au cercle Γ étant parallèle à Δ, pour obtenir le point M, il suffit de mener au cercle Γ une tangente parallèle à Δ.

(fig. 110) et le cercle de contact Γ devient le grand cercle perpendiculaire à Δ. On est ainsi conduit à la construction suivante :

Menez par le centre de la sphère le plan perpendiculaire à Δ*; ce plan coupe la droite* Δ *en un point* T *et la sphère suivant un cercle* Γ. *Menez par* T *les tangentes* TM, TN *au cercle* Γ *: les plans* ΔTM, ΔTN *sont les plans demandés.*

Méthode des deux cônes. — Si l'on considère deux cônes circonscrits à la sphère et ayant pour sommets deux points de la droite Δ, le point de contact du plan tangent cherché doit se trouver à la fois sur les cercles de contact de ces deux cônes ; donc il est à l'intersection de ces deux cercles.

On peut d'ailleurs remplacer l'un de ces deux cônes par le cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles à Δ.

POSITIONS RELATIVES DE DEUX SPHÈRES

179. Soient (fig. 111) O et O′ les centres, d la distance des centres, r et r' les rayons de deux sphères. Les positions relatives de ces deux sphères sont les mêmes que celles des deux grands cercles, Γ et Γ′, obtenus en coupant ces deux sphères par un plan quelconque passant par OO′.

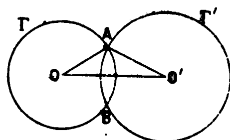


Fig. 111.

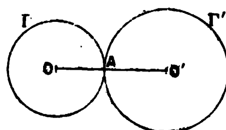


Fig. 112.

1° Si $d > r + r'$, les deux cercles Γ, Γ′ sont *extérieurs* l'un à l'autre ; donc il en est de même des deux sphères engendrées par ces deux cercles tournant autour de OO′.

2° Si $d = r + r'$ (fig. 112), les deux cercles Γ, Γ′ ont

un point commun A, et un seul, situé sur OO′; donc il en est de même des deux sphères.

Elles ont même plan tangent en A; on dit alors qu'elles sont *tangentes extérieurement.*

3° Si $| r - r' | < d < r + r'$, les deux cercles Γ, Γ' se coupent en deux points A et B (fig. 111) *symétriques par rapport à* OO′; donc, lorsque les deux cercles, en tournant autour de OO′, engendrent les deux sphères, les deux points A et B engendrent un seul et même cercle, qui est le lieu des points communs aux deux sphères. L'*axe* de ce cercle est OO′; donc

Lorsque deux sphères se coupent, leur intersection est un cercle ayant pour axe la droite des centres des deux sphères.

4° Si $d = r - r'$, les deux sphères ont un point commun et un seul, sur le prolongement de OO′; elles ont même plan tangent en ce point. On dit alors qu'elles sont *tangentes intérieurement.*

5° Enfin, si $d < r - r'$, la sphère O′ est *intérieure* à la sphère O.

Les réciproques sont vraies [G.P. 19].

180. Si A est un point commun à deux surfaces, on appelle *angle des deux surfaces en ce point* l'angle formé par les plans tangents ou, ce qui revient au même, par les normales à ces deux surfaces en ce point.

En particulier, si A est un point commun à deux sphères de centres O et O′ (fig. 111), l'angle des deux sphères en A est l'angle des rayons OA, O′A, c'est-à-dire l'angle OAO′, ou son supplément; nous conviendrons de prendre toujours l'angle OAO′. Si B est un second point commun aux deux sphères, l'angle OBO′ est égal à OAO′, à cause de l'égalité des triangles OAO′, OBO′. Donc

Deux sphères se coupent sous le même angle en tous leurs points communs.

181. Si A est un point commun à une ligne et à une surface, on appelle *angle de la ligne et de la surface en ce point* l'angle formé par la tangente à la ligne et le plan tangent à la surface en ce point, ou, ce qui revient au même, le complément de l'angle formé par la tangente à la ligne avec la normale à la surface.

En particulier, si une droite rencontre une sphère de centre O en deux points A et B, les angles de la droite avec la sphère en ces deux points sont respectivement complémentaires des angles OAB, OBA ; donc ils sont égaux.

182. On dit que deux surfaces, ou une ligne et une surface, sont *orthogonales en un point*, quand elles se coupent en ce point sous un angle droit.

Pour que deux sphères soient orthogonales, il faut et il suffit que le carré de la distance de leurs centres soit égal à la somme des carrés de leurs rayons.

SPHÈRE CIRCONSCRITE A UN TÉTRAÈDRE

183. ***Théorème.*** — *Par quatre points* A,B,C,D, (fig. 113) *non situés dans un même plan, on peut faire passer une sphère et on n'en peut faire passer qu'une.*

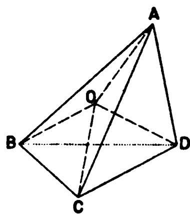


Fig. 113.

Le centre d'une sphère passant par A, B, C, D, doit être équidistant de ces quatre points, et, par suite, doit se trouver à la fois dans les trois plans perpendiculaires aux milieux des trois droites AB, AC, AD. Ces trois plans se coupent en un point unique O [83]. Ce point O est équidistant de A, B, C, D ; donc la sphère de centre O et de rayon OA passe par A, B, C, D, et c'est la seule qui passe par ces quatre points, car O est le seul point équidistant de A,B,C,D.

On dit que cette sphère est *circonscrite* au tétraèdre, ou que le tétraèdre est *inscrit* à cette sphère.

184. Corollaires. — I. — *Par un cercle et un point non situés dans le même plan, on peut faire passer une sphère, et une seule.*

II. — *Par deux cercles non situés dans le même plan et ayant deux points communs, on peut faire passer une sphère et une seule.*

EXERCICES

1. La somme des carrés des distances du sommet d'un trièdre trirectangle aux points de rencontre de ses arêtes avec une sphère donnée est constante.

2. Trois plans perpendiculaires deux à deux, menés par un point donné, déterminent sur une sphère trois petits cercles dont la somme des aires est constante.

3. La somme des carrés des projections de trois rayons d'une même sphère perpendiculaires deux à deux sur un plan quelconque est égale à deux fois le carré du rayon.

4. Lieu des points de l'espace dont le rapport des distances à deux points donnés est constant.

5. Trouver le lieu des points d'où l'on voit trois sphères données sous le même angle.

6. Trouver le lieu des points de l'espace également éclairés par deux points lumineux.

7. Lieu des points d'où l'on voit une sphère, ou deux sphères, sous un angle donné.

8. Lieu des points de l'espace dont la somme ou la différence des carrés des distances à deux points fixes est constante.

9. Lieu des centres des sphères qui coupent suivant des grands cercles deux sphères ou trois sphères données.

10. Lieu des centres des sections d'une sphère par les plans passant par un point donné ou par une droite donnée.

11. Mener par une droite donnée un plan qui coupe une sphère suivant un cercle de rayon donné.

12. Mener par une droite un plan qui coupe deux sphères données suivant deux cercles dont la différence soit équivalente à un cercle donné.

CHAPITRE IV

FIGURES TRACÉES SUR LA SPHÈRE

185. Le lieu des points de l'espace équidistants de tous les points d'un cercle d'une sphère est la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan du cercle.

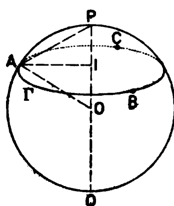


Fig. 114.

Les deux points où cette perpendiculaire perce la sphère s'appellent les *pôles* du cercle ; chacun d'eux est équidistant de tous les points du cercle, et ce sont les seuls points de la sphère qui jouissent de cette propriété.

Réciproquement, si on met l'une des pointes d'un compas en un point P (fig. 114) d'une sphère, la ligne décrite par l'autre pointe, en se déplaçant sur la surface de la sphère, est un cercle de pôle P ; car cette ligne est l'intersection de la sphère considérée avec la sphère qui a pour centre P et pour rayon la distance des pointes du compas, que l'on suppose, bien entendu, moindre que le diamètre de la sphère.

186. Les pôles d'un cercle d'une sphère jouent donc le même rôle que le centre d'un cercle en géométrie plane. Les arcs de grand cercle, moindres qu'une demi-circonférence, qui joignent un pôle aux divers points du cercle s'appellent *rayons sphériques* de ce cercle ; ils sont égaux entre eux, car les cordes qui les sous-tendent sont égales.

La somme des rayons sphériques, PA et QA, qui joi-

gnent un point du cercle aux deux pôles, est égale à une demi-circonférence. D'ordinaire, on choisit le pôle le plus rapproché, de sorte que le rayon sphérique correspondant est moindre qu'un quadrant.

Le rayon sphérique d'un grand cercle est un quadrant, quel que soit celui des deux pôles que l'on considère ; donc, pour tracer un grand cercle, il faut connaître le rayon de la sphère.

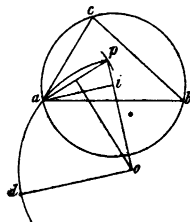


Fig. 115.

187. Problème. — *Trouver le rayon d'une sphère solide.* — D'un point P (fig. 114) de la sphère, comme pôle, avec une ouverture de compas arbitraire l, décrivons sur la sphère un cercle Γ ; marquons sur ce cercle trois points A, B, C ; relevons avec le compas les trois distances BC, CA, AB ; puis construisons, sur une feuille de papier (fig. 115) un triangle *abc* ayant pour côtés ces trois distances. Ce triangle est égal au triangle ABC de l'espace ; donc le rayon *ia* du cercle circonscrit au triangle *abc* est égal au rayon IA du cercle Γ. Soit O le centre de la sphère ; dans le triangle isocèle OAP, on connaît la base $AP = l$ et la hauteur AI issue de A ; donc on peut construire ce triangle. Pour cela, menons par *i* la perpendiculaire à *ai* et décrivons, de *a* comme centre avec l pour rayon, un cercle, qui coupe cette perpendiculaire en *p* ; enfin, menons la perpendiculaire au milieu de *ap*, et soit *o* le point de rencontre de cette perpendiculaire avec *pi* : le rayon de la sphère est égal à *op*.

Traçons le cercle de centre *o* et de rayon *op*, puis menons le rayon *od* perpendiculaire à *op* ; le quadrant *pd*

est égal au rayon sphérique d'un grand cercle, et la corde *pd* est l'ouverture de compas qu'il faut prendre pour décrire des grands cercles sur la sphère

188. Le lieu des pôles des grands cercles passant par un point donné sur la sphère est évidemment le grand cercle qui a pour pôle ce point. Donc les pôles du grand cercle qui passe par deux points *non opposés* se trouvent à l'intersection des grands cercles ayant pour pôles ces deux points.

189. Deux points A et B de la sphère, non opposés, sont les extrémités de deux arcs de grand cercle, l'un plus petit, l'autre plus grand qu'une demi-circonférence. Nous désignerons toujours par AB le plus petit de ces deux arcs et, d'ordinaire, nous dirons *arc* au lieu de *arc de grand cercle moindre qu'une demi-circonférence.*

ANGLES DE DEUX ARCS DE GRANDS CERCLES

190. Soit (fig. 116) O le centre de la sphère. L'angle de deux arcs AB et AC issus d'un point A est, par définition, l'angle des demi-droites, AS et AT, tangentes en A aux deux arcs et situées respectivement dans les demi-plans OAB, OAC. Or ces tangentes sont perpendiculaires au rayon OA ; donc l'angle qu'elles forment est précisément le rectiligne du dièdre BOAC. Par conséquent,

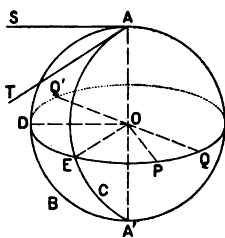


Fig. 116.

Si l'angle de deux arcs est droit, les plans de ces deux arcs sont perpendiculaires.

191. Menons dans les demi-plans OAB, OAC les rayons OD, OE perpendiculaires sur OA; l'angle DOE de ces deux rayons est égal à SAT. Mais cet angle DOE à même mesure que l'arc DE compris entre ses côtés et le point A est l'un des pôles de l'arc DE. D'où ce théorème :

Théorème. — *L'angle de deux arcs de grands cercles a même mesure que l'arc compris entre ses côtés et décrit de son sommet comme pôle.*

192. Enfin, si l'on prend sur le grand cercle DE, *dans le même sens*, deux arcs DP, EQ, égaux chacun à un quadrant, le point P est l'un des pôles de AB, le point Q est l'un des pôles de AC, et l'arc PQ est évidemment *égal* à DE ; tandis que, si Q′ est le second pôle de AC, l'arc PQ′ est *supplémentaire* de DE. Donc, en remarquant que les points P et Q sont d'un même côté du grand cercle *bissecteur* de l'angle sphérique BAC, tandis que P et Q′ sont de part et d'autre, on a ce théorème :

Théorème. — *L'angle de deux arcs de grands cercles a même mesure que le supplément de l'arc joignant les pôles de ses côtés, ou même mesure que cet arc, selon que les pôles considérés sont, ou non, de part et d'autre du grand cercle bissecteur.*

193. Deux grands cercles forment quatre angles, dont chacun est égal à celui qui lui est opposé par le sommet et supplémentaire des deux autres. Si l'un de ces quatre angles est droit, ils sont droits tous les quatre, et alors les deux grands cercles sont *perpendiculaires* [cf. 190].

194. **Théorème.** — *Pour que deux grands cercles soient perpendiculaires, il faut et il suffit que l'un passe par les pôles de l'autre.*

En effet, soient P un pôle de l'un, Q un pôle de l'autre; s'ils sont perpendiculaires, PQ est égal à un quadrant, donc le grand cercle de pôle P passe par Q. Et réciproquement.

195. **Théorème.** — *Le lieu des pôles des grands cercles faisant un angle donné* α *avec un grand cercle donné* Γ *se compose de deux cercles opposés, dont les pôles sont ceux de* Γ *et dont les rayons sphériques ont même mesure que* α.

En effet, soient P et P′ les pôles de Γ, et soit Q l'un des pôles d'un grand cercle faisant avec Γ un angle égal à α; l'un des deux arcs PQ, P′Q a même mesure que α. — Et réciproquement.

POLYGONES SPHÉRIQUES

196. On appelle *brisée sphérique* une ligne formée d'arcs de grands cercles ; ces arcs sont les *côtés*, leurs extrémités sont les *sommets*, et les angles formés chacun par deux côtés consécutifs sont les *angles* de la brisée. Nous supposerons que chaque côté est moindre qu'une demi-circonférence et que deux côtés consécutifs quelconques appartiennent à des grands cercles différents.

On dit qu'une brisée sphérique est *convexe*, quand le grand cercle qui passe par deux sommets consécutifs quelconques est tel que tous les autres sommets sont dans un même hémisphère limité par ce grand cercle.

On appelle *polygone sphérique* une brisée sphérique

fermée. On emploie aussi le mot *polygone* pour désigner une portion de sphère limitée par une brisée fermée dont les côtés ne s'entre-croisent pas ; si cette brisée est convexe, l'une des portions de sphère qu'elle limite est moindre qu'un hémisphère : c'est toujours celle-là que l'on considère.

On appelle *triangle sphérique* un polygone sphérique de trois côtés. Un triangle sphérique est toujours convexe, si, comme nous le supposons, chacun de ses trois côtés est moindre qu'une demi-circonférence.

197. En joignant les sommets d'un polygone sphérique convexe au centre de la sphère, on forme un angle polyèdre convexe, dont les dièdres ont même mesure que les angles du polygone et dont les faces ont même mesure que les côtés du polygone. Donc on peut déduire les propriétés des polygones sphériques de celles des angles polyèdres, en remplaçant respectivement les mots : *angle polyèdre, trièdre, dièdre, face*, par les mots : *polygone sphérique, triangle sphérique, angle, côté,* comme l'indique le tableau suivant :

ANGLES POLYÈDRES	POLYGONES SPHÉRIQUES
I. Dans tout *trièdre*, une *face* quelconque est plus petite que la somme des deux autres et plus grande que leur différence.	I. Dans tout *triangle sphérique*, un *côté* quelconque est plus petit que la somme des deux autres et plus grand que leur différence.
II. La somme des *faces* d'un *angle polyèdre* convexe est moindre que quatre *droits*.	II. La somme des *côtés* d'un *polygone sphérique* convexe est moindre que quatre *quadrants*.
III. La somme des *dièdres* d'un *trièdre* est plus grande que deux droits.	III. La somme des *angles* d'un *triangle sphérique* est plus grande que deux droits.
IV. On dit que deux *trièdres*	IV. On dit que deux *trian-*

sont *symétriques* quand l'un d'eux est égal au *trièdre* obtenu en prolongeant les arêtes de l'autre au delà du sommet.

Deux *trièdres* symétriques ont leurs six éléments égaux chacun à chacun, mais disposés dans l'ordre inverse.

V. Deux *trièdres* sont égaux ou symétriques :

1° Quand ils ont une *face* égale adjacente à deux *dièdres* égaux chacun à chacun;

2° Quand ils ont un *dièdre* égal compris entre deux *faces* égales chacune à chacune;

3° Quand ils ont les trois *faces* égales chacune à chacune.

4° Quand ils ont les trois *dièdres* égaux chacun à chacun.

etc.

gles sphériques sont *symétriques* quand l'un d'eux est égal à l'opposé de l'autre.

Deux *triangles sphériques* symétriques ont leurs six éléments égaux chacun à chacun, mais disposés dans l'ordre inverse.

V. Deux *triangles sphériques* sont égaux ou symétriques :

1° Quand ils ont un *côté* égal adjacent à deux *angles* égaux chacun à chacun;

2° Quand ils ont un *angle* égal compris entre deux *côtés* égaux chacun à chacun;

3° Quand ils ont les trois *côtés* égaux chacun à chacun;

4° Quand ils ont les trois *angles* égaux chacun à chacun.

etc.

EXERCICES

1. Construire le grand cercle perpendiculaire au milieu de l'arc qui joint deux points donnés sur la sphère.

2. Construire les grands cercles bissecteurs des angles formés par deux grands cercles donnés.

— Pour ces deux problèmes, les constructions sont les mêmes qu'en Géométrie plane, en remplaçant les lignes droites par des grands cercles.

3. Mener par un point donné sur la sphère un grand cercle faisant un angle donné avec un grand cercle donné. — On construit les pôles du grand cercle cherché [195].

4. Construire un triangle sphérique, connaissant trois des six éléments.— Mêmes constructions qu'en Géométrie plane.

5. On dit que deux cercles de la sphère sont *tangents* quand ils n'ont qu'un point commun; prouver que ce point est sur le grand cercle qui passe par leurs pôles.

6. Mener par un point donné sur la sphère un grand cercle tangent à un petit cercle donné.

7. Mener un grand cercle tangent à deux petits cercles donnés.

8. Construire un cercle de rayon donné tangent à deux cercles donnés sur la sphère.

— Pour les trois problèmes précédents, on cherche les pôles du cercle demandé.

CHAPITRE V

AIRE ET VOLUME DE LA SPHÈRE

198. LEMME. — *L'aire de la surface engendrée par une droite* AB *tournant autour d'un axe* XY *qui est situé dans un plan passant par cette droite et qui ne la traverse pas, est égale au produit de la projection* A′B′ *de cette droite sur l'axe par la circonférence ayant pour rayon le segment* MN *intercepté par la droite et l'axe sur la perpendiculaire au milieu de la droite.*

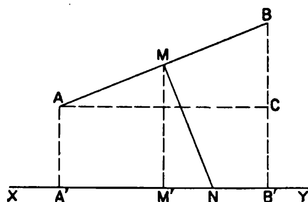


Fig. 117.

1° Si la droite AB (fig. 117) n'est pas parallèle à l'axe et qu'elle n'ait aucune de ses extrémités sur l'axe, elle engendre la surface latérale d'un tronc de cône ; donc, en abaissant MM′ perpendiculaire sur XY, on a

$$\text{surf. AB} = 2\pi \text{MM}' \times \text{AB}.$$

Abaissons AA′ et BB′ perpendiculaires sur XY, puis AC perpendiculaire sur BB′. Les triangles MNM′ et ABC sont semblables, comme ayant leurs côtés perpendiculaires ; donc

$$\frac{\text{MM}'}{\text{AC}} = \frac{\text{MN}}{\text{AB}}\,;$$

d'où

$$MM' \times AB = MN \times AC,$$

ou

$$MM' \times AB = MN \times A'B'.$$

Par conséquent,

$$\text{surf. } AB = 2\pi MN \times A'B'.$$

2° Si la droite AB a une extrémité A sur l'axe (fig. 118), elle engendre la surface latérale d'un cône ; donc, en abaissant BB' et MM' perpendiculaires sur XY, on a

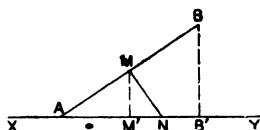


Fig. 118.

$$\text{surf. } AB = \pi BB' \times AB$$

ou

$$\text{surf. } AB = 2\pi MM' \times AB,$$

car $BB' = 2MM'$. Mais les triangles MNM', ABB' sont encore semblables, comme ayant leurs côtés perpendiculaires ; donc

$$\frac{MM'}{AB'} = \frac{MN}{AB},$$

d'où

$$MM' \times AB = MN \times AB'.$$

Par conséquent,

$$\text{surf. } AB = 2\pi MN \times AB'.$$

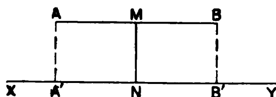


Fig. 119.

3° Si la droite AB est parallèle à l'axe (fig. 119), elle engendre la surface latérale d'un cylindre ; dans ce cas, on a immédiatement

$$\text{surf. } AB = 2\pi MN \times A'B'.$$

199. On appelle *zone* la portion de la surface d'une sphère comprise entre deux plans parallèles qui rencontrent la sphère. La distance de ces deux plans est la *hauteur* de la zone. Si l'un de ces plans est tangent, la zone prend le nom de *calotte*.

200. Toute zone peut être engendrée par un arc de cercle AB (fig. 120) tournant autour d'un diamètre PQ qui ne le traverse pas. La projection A'B' de cet arc sur le diamètre est la hauteur de la zone.

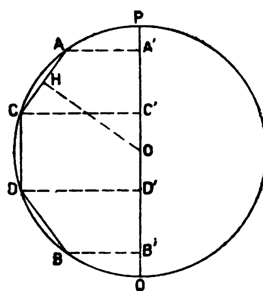


Fig. 120.

On appelle *aire* de la zone engendrée par l'arc AB tournant autour du diamètre PQ, la limite vers laquelle tend l'aire de la surface engendrée par une brisée régulière convexe ACDB inscrite à l'arc AB, et tournant autour du même diamètre, lorsque le nombre des côtés de cette brisée augmente indéfiniment. Nous allons démontrer que cette limite existe et qu'elle est unique.

Soit OH l'apothème de la brisée ACDB, et soient A', C', D', B', les projections de ses sommets sur le diamètre PQ ; on a

$$\text{surf. AC} = 2\pi\text{OH} \times \text{A'C'},$$
$$\text{surf. CD} = 2\pi\text{OH} \times \text{C'D'},$$
$$\text{surf. DB} = 2\pi\text{OH} \times \text{D'B'}.$$

Donc

$$\text{surf. ACDB} = 2\pi\text{OH} \times \text{A'B'}.$$

Si le nombre des côtés de la brisée augmente indéfiniment, l'apothème OH a pour limite le rayon r ; donc surf. ACDB a pour limite $2\pi r \times \text{A'B'}$. C'est cette limite

que nous appellerons l'aire de la zone ; donc, en désignant par h la hauteur A'B', on a

$$\text{zone} = 2\pi rh.$$

L'aire d'une zone est égale au produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle.

201. On en déduit l'aire de la sphère, en considérant la sphère comme une zone dont la hauteur est égale au diamètre $2r$; donc

$$\text{Aire de la sphère} = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2.$$

L'aire d'une sphère équivaut à quatre fois celle d'un grand cercle.

SECTEUR SPHÉRIQUE

202. Lemme. — *Le volume engendré par un triangle* ABC, *en tournant autour d'un axe* AX *passant par l'un de ses sommets,* A, *situé dans son plan et ne le traversant pas, est égal au produit du tiers de la hauteur* AD *issue du sommet fixe* A *par la surface engendrée par le côté opposé.*

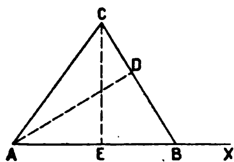


Fig. 121.

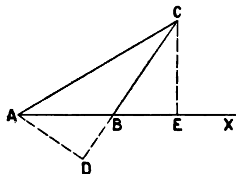


Fig. 122.

1° Supposons (fig. 121, 122, 123) que l'axe AX coïncide avec l'un des côtés AB ou AC, par exemple, avec AB.

Abaissons la hauteur CE. Le volume engendré par ABC

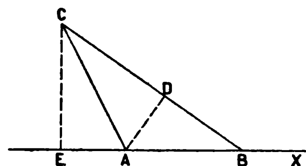


Fig. 123.

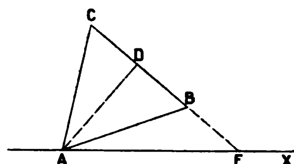


Fig. 124.

est la somme ou la différence des cônes engendrés par les triangles rectangles ECA, ECB ; donc on a

$$\text{vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi\overline{CE}^2\,(AE + EB)$$

ou

$$\text{vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi\overline{CE}^2\,(AE - BE);$$

donc, dans tous les cas,

$$\text{vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi\,\overline{CE}^2 \times AB$$
$$= \frac{1}{3}\pi CE \times CE \times AB.$$

Or, $CE \times AB = BC \times AD$, car ces deux produits représentent le double de l'aire du triangle ABC.

Donc

$$\text{vol. ABC} = \frac{1}{3}\pi CE \times BC \times AD.$$

Mais $\pi CE \times BC$ représente l'aire de la surface engendrée par BC ; donc

$$\text{vol. ABC} = \frac{1}{3}\,AD \times \text{surf. BC}.$$

2° Supposons (fig. 124) que l'axe AX ne coïncide ni avec AB, ni avec AC et qu'il rencontre le prolongement du troi-

sième côté CB en F. Le volume engendré par ABC est la différence des volumes engendrés par les triangles ACF, ABF, qui ont chacun un côté sur l'axe. Donc, d'après le cas précédent,

$$\text{vol. ABC} = \frac{1}{3} \text{AD (surf. CF} - \text{surf. BF)}$$
$$= \frac{1}{3} \text{AD} \times \text{surf. BC}.$$

3° Supposons (fig. 125, 126 et 127) que l'axe AX soit parallèle au côté BC. Le volume engendré par ABC est la somme ou la différence des volumes engendrés par les triangles rectangles ABD, ACD. Mais, si l'on abaisse BH perpendiculaire sur l'axe, on voit que le volume engendré par ABD est la différence entre le cylindre engendré par ADBH et le cône engendré par ABH ; comme ce cône est le tiers du cylindre, le volume engendré par ABD en est les deux tiers. De même, en abaissant CE perpendiculaire sur l'axe, on voit que le volume engendré par ACD est les deux tiers du cylindre engendré par ADCE. Donc le volume engendré par ABC est les deux tiers de la

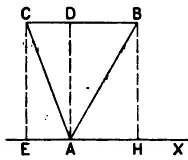


Fig. 125.

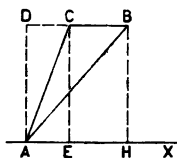


Fig. 126.

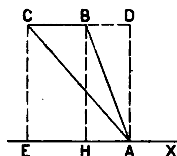


Fig. 127.

somme (fig. 125) ou de la différence (fig. 126 et 127) des cylindres engendrés par ADBH et ADCE, c'est-à-dire dans tous les cas, les deux tiers du cylindre engendré par BCEH :

$$\text{vol. ABC} = \frac{2}{3} \pi \overline{\text{AD}}^2.\text{BC} = \frac{1}{3} \text{AD} \times 2\pi \text{ AD.BC}$$

Mais $2\pi AD \times BC$ représente la surface engendrée par BC ; donc, on a encore :

$$\text{vol. ABC} = \frac{1}{3} \text{AD} \times \text{surf. BC}.$$

203. Définition. — On appelle *secteur sphérique* le corps engendré par un secteur circulaire OAB (fig. 128), en tournant autour d'un diamètre PQ qui ne le traverse pas.

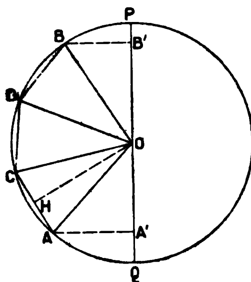


Fig. 128.

On appelle *volume du secteur sphérique* engendré par un secteur circulaire OAB, en tournant autour d'un diamètre PQ, la limite vers laquelle tend le volume engendré par un secteur polygonal régulier OACDB inscrit au secteur circulaire et tournant autour du même diamètre, lorsque le nombre des côtés de la brisée ACDB augmente indéfiniment.

Nous allons prouver que cette limite existe et qu'elle est unique.

Le volume engendré par OACDB est la somme des volumes engendrés par les triangles OAC, OCD, ODB. Or, en menant l'apothème OH, on a

$$\text{vol. OAC} = \frac{1}{3} \text{OH} \times \text{surf. AC},$$

$$\text{vol. OCD} = \frac{1}{3} \text{OH} \times \text{surf. CD},$$

$$\text{vol. ODB} = \frac{1}{3} \text{OH} \times \text{surf. DB}.$$

Donc

$$\text{vol. OACDB} = \frac{1}{3} \text{OH} \times \text{surf. ACDB}.$$

Si l'on augmente indéfiniment le nombre des côtés de la brisée ACDB, l'aire de la surface qu'elle engendre a pour limite l'aire de la zone engendrée par l'arc AB ; d'ailleurs, l'apothème OH a pour limite le rayon r. Donc vol. OACDB a pour limite le produit de l'aire de la zone AB par le tiers du rayon. C'est cette limite que nous appelons le volume du secteur sphérique. Ainsi,

Le volume du secteur sphérique est égal au produit de l'aire de la zone correspondante par le tiers du rayon.

Or l'aire de la zone est égale à $2\pi rh$, en désignant par h sa hauteur, donc

$$\text{vol. secteur sphérique} = \frac{2}{3}\pi r^2 h.$$

204. On en déduit le volume de la sphère en faisant $h = 2r$:

$$\text{vol. sphère} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Si l'on appelle d le diamètre de la sphère, on a

$$r = \frac{d}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad r^3 = \frac{d^3}{8}.$$

Par conséquent

$$\text{vol. sphère} = \frac{1}{6}\pi d^3.$$

SEGMENT SPHÉRIQUE

205. Lemme. — *Le volume engendré par un segment circulaire* AMB (fig. 129) *en tournant autour d'un diamètre* PQ *qui ne le traverse pas équivaut au sixième d'un cylindre ayant pour rayon la corde* AB, *et pour hauteur la projection* A'B' *de cette corde sur le diamètre* PQ.

En effet, menons les rayons OA et OB et la perpendiculaire OH sur la corde AB ; le volume engendré par le segment AMB est la différence entre les volumes engendrés par le secteur OAMB et par le triangle OAB.

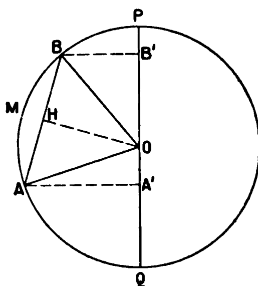


Fig. 129.

Or

$$\text{vol. OAMB} = \frac{2}{3}\pi\overline{OA}^2 \times A'B',$$

$$\text{vol. OAB} = \text{surf. AB} \times \frac{1}{3}OH.$$

Mais [198]

$$\text{surf. AB} = 2\pi OH \times A'B';$$

donc

$$\text{vol. OAB} = \frac{2}{3}\pi\overline{OH}^2 \times A'B'.$$

Par conséquent,

$$\text{vol. AMB} = \frac{2}{3}\pi\left(\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2\right) A'B'.$$

Or

$$\overline{OA}^2 - \overline{OH}^2 = \overline{AH}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{4};$$

donc

$$\text{vol. AMB} = \frac{1}{6}\pi\overline{AB}^2 \times A'B'.$$

206. Définition. — On appelle *segment sphérique* (fig. 130) la portion du volume de la sphère comprise entre deux plans parallèles qui rencontrent la sphère.

La distance de ces deux plans s'appelle la *hauteur* du segment ; les sections faites dans la sphère par ces deux plans s'appellent les *bases* du segment. Dans le cas particulier où l'un des deux plans est tangent à la sphère, le

segment n'a qu'une base, qui est la section faite dans la sphère par l'autre plan.

Considérons d'abord un segment sphérique à deux bases. Soient (fig. 130) A et B les centres de ces deux bases ; menons deux rayons parallèles AC, BD et soit CND l'arc de grand cercle qui joint les extrémités de ces rayons. On peut considérer le segment sphérique comme engendré par le trapèze *mixtiligne* ACNDB, en tournant autour de AB, c'est-à-dire comme la somme du tronc de cône engendré par le trapèze *rectiligne* ACDB et du volume engendré par le segment circulaire CND. Donc, en désignant par v le volume du segment sphérique, par a, b les rayons des deux bases, et par h la hauteur, on a

Fig. 130.

$$v = \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2) + \frac{1}{6}\pi \overline{CD}^2 \times h.$$

Or, en abaissant DE perpendiculaire sur AC, on a, dans le triangle rectangle CDE,

$$\overline{CD}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{CE}^2 = h^2 + (a - b)^2;$$

d'où, en substituant dans l'expression de v et simplifiant,

$$(1) \qquad v = \frac{1}{2}\pi h(a^2 + b^2) + \frac{1}{6}\pi h^3.$$

D'où ce théorème :

Le volume d'un segment sphérique à deux bases équivaut à la demi-somme de deux cylindres ayant pour hau-

teur commune la hauteur du segment et pour bases respectives les bases du segment, augmentée d'une sphère ayant pour diamètre la hauteur du segment.

207. On arrive à une expression plus simple en considérant la section équidistante des bases du segment. Soient M le centre, MN $= \rho$ le rayon de cette section ; et soit P l'une des extrémités du diamètre de la sphère perpendiculaire aux plans des bases ; posons

$$PA = x, \qquad PB = y, \qquad PM = z = \frac{x+y}{2}.$$

En désignant toujours par r le rayon de la sphère, on a

$$a^2 = x(2r - x),$$
$$b^2 = y(2r - y);$$

d'où

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2) = 2rz - \frac{x^2 + y^2}{2}$$
$$= 2rz - \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$
$$= 2rz - z^2 - \frac{h^2}{4}$$
$$= \rho^2 - \frac{h^2}{4}.$$

En portant dans (1) et simplifiant, on trouve

$$(2) \qquad v = \pi h\left(\rho^2 - \frac{h^2}{12}\right).$$

Cette formule est due à MAC-LAURIN.

208. Considérons (fig. 130 *bis*) le segment sphérique *à une base* CAC'P, limité par le cercle AC, de rayon a, et par la calotte CPC'. On peut le considérer comme un segment sphérique à deux bases dont l'une est réduite au pôle P

de la calotte. Donc son volume s'obtient en faisant $b = 0$ dans la formule (1), ce qui donne :

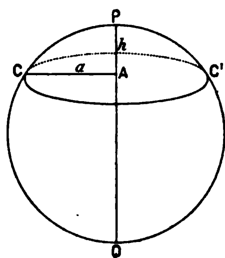


Fig. 130 *bis*.

$$(3) \qquad v = \frac{1}{2}\pi a^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3,$$

h désignant la hauteur du segment, c'est-à-dire AP.

Soit r le rayon de la sphère, on a

$$a^2 = h(2r - h);$$

en portant dans (3) et simplifiant, on trouve

$$(4) \qquad v = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h).$$

On se sert de la formule (3) ou de la formule (4) selon qu'on donne le rayon de la base du segment ou celui de la sphère. On peut aussi appliquer la formule de Mac-Laurin.

EXERCICES

1. Inscrire à une sphère un cylindre droit dont la somme des deux bases soit équivalente à la surface latérale.

2. Un cône droit dont l'arête est égale au diamètre de la base est inscrit à une sphère ; étudier les variations de la différence des sections faites dans ce cône et dans la sphère par un plan parallèle à la base du cône.

3. Calculer les rayons des bases d'un tronc de cône droit inscrit à une sphère connaissant le volume et la hauteur de ce tronc.

4. Inscrire à une sphère un cylindre de surface totale donnée.

5. Inscrire à une sphère un prisme triangulaire régulier ayant le plus grand volume possible.

6. Maximum de la surface latérale, de la surface totale, du volume d'un cylindre ou d'un cône inscrit à une sphère donnée.

7. Circonscrire à une sphère donnée un cône ou un tronc de cône de volume maximum.

8. L'aire d'une calotte équivaut à celle d'un cercle ayant pour rayon la corde de l'arc générateur de la calotte.

9. La zone que deux sphères concentriques interceptent sur une sphère variable passant par leur centre, est constante.

10. Quelle portion de la surface de la terre peut apercevoir une personne qui s'élève en ballon à une hauteur h ?

11. Partager une zone en moyenne et extrême raison par un plan parallèle aux bases.

12. Déterminer sur une sphère une calotte sphérique dont la surface soit le double de la surface engendrée par la corde de l'arc générateur de cette calotte.

13. Couper une sphère par un plan de façon que l'aire de la section soit égale à la différence des aires des deux calottes obtenues par la section.

14. Couper une sphère par un plan de façon que la moyenne géométrique des deux calottes sphériques obtenues soit équivalente à l'aire d'un grand cercle.

15. Couper une sphère par deux plans équidistants du centre de façon que la somme des aires des deux sections soit équivalente à l'aire de la zone comprise entre ces deux plans.

16. Déterminer sur une sphère donnée une calotte dont la surface soit le triple de celle de sa base.

17. Inscrire à une sphère un cône droit dont la surface latérale soit équivalente à la calotte sphérique de même base sur laquelle ne se trouve pas le sommet du cône.

18. Couper une sphère par un plan tel que la surface latérale du cône circonscrit suivant l'intersection augmentée de n fois la surface de la calotte sphérique extérieure au cône soit égale à la surface d'un cercle donné.

19. On donne deux cercles O, O'; trouver sur la ligne des centres OAA'O' un point P tel qu'en menant les tangentes PC, PC' aux deux cercles et en faisant tourner les arcs AC, A'C' autour de la ligne des centres, la somme des deux calottes obtenues soit maximum.

20. A un demi-cercle de diamètre AB on mène une tangente CD dont le point de contact est C et qui rencontre le diamètre en D, puis on fait tourner la figure autour de l'axe ABD. Où doit être le point de contact C pour que la surface conique engendrée par CD soit dans un rapport donné avec la calotte engendrée par l'un des arcs AC ou BC ?

21. Connaissant la longueur de l'axe d'une chaudière cylindrique terminée par deux demi-sphères, calculer les dimensions de la partie cylindrique, de façon que la surface totale de la chaudière soit égale à une surface donnée.

22. Le volume engendré par un triangle tournant autour d'une droite située dans son plan et ne le coupant pas est égal au produit

de l'aire de ce triangle par la circonférence que décrit son centre de gravité.

23. Calculer les côtés d'un triangle connaissant les volumes engendrés par ce triangle quand il tourne successivement autour de chacun de ses côtés.

24. Autour de quel côté faut-il faire tourner un triangle donné pour obtenir le plus grand volume ?

25. Quelle position doit-on donner dans un plan à un triangle ABC pour que le volume engendré par ce triangle en tournant autour d'un axe passant par son sommet A et tracé dans le plan du triangle, soit le plus grand possible ?

26. Étant donnés deux triangles et un point dans un plan, mener par ce point une droite telle que les volumes engendrés par ces triangles en tournant autour de cette droite soient dans un rapport donné.

27. Partager un triangle ABC par une sécante AD telle que les volumes engendrés par les deux triangles ABD, ACD en tournant autour d'un axe donné dans le plan du triangle soient équivalents.

28. Le volume engendré par un hexagone régulier tournant autour d'un de ses côtés est équivalent à une sphère dont le diamètre est le triple de ce côté.

29. On inscrit à un demi-cercle un demi-polygone régulier d'un nombre pair de côtés et on lui circonscrit un demi-polygone semblable. La surface de la sphère engendrée par la rotation du demi-cercle autour de son diamètre est la moyenne géométrique des surfaces engendrées par les deux demi-polygones en tournant autour du même diamètre.

30. Trouver la relation qui existe entre les nombres qui mesurent le volume, la base et la hauteur d'un cône ou d'un cylindre, quand on prend pour unité de volume une sphère dont le rayon est égal à l'unité de longueur, et pour unité d'aire, l'aire de cette même sphère.

31. Si de chaque sommet d'un parallélépipède comme centre on décrit des sphères égales (de rayon moindre que la moitié de la plus petite arête), toutes ces sphères enlèvent du volume du parallélépipède une partie égale à l'une d'elles tout entière.

32. Si l'on circonscrit à une sphère un cylindre et un cône dont l'arête soit égale au diamètre de la base, la surface totale du cylindre est moyenne géométrique entre la surface de la sphère et la surface totale du cône ; le volume du cylindre est la moyenne géométrique du volume de la sphère et de celui du cône. Ces trois surfaces et ces trois volumes sont proportionnels aux nombres 4, 6, 9.

33. Si l'on inscrit à une sphère un cylindre et un cône dont les arêtes soient égales aux diamètres des bases, la surface et le volume

du cylindre seront moyennes géométriques entre la surface et le volume de la sphère et du cône, mais les rapports de ces surfaces ne sont pas les mêmes que les rapports de leurs volumes.

34. Si, dans un cylindre dont la hauteur est égale au diamètre de la base, on inscrit une sphère et un cône droit, les volumes de ces trois corps sont comme les nombres 1, 2, 3.

— Cette figure était, paraît-il, gravée sur le tombeau d'Archimède.

35. On inscrit une sphère à un cône de révolution, puis une deuxième sphère tangente à la première et au cône et ainsi de suite, les rayons de ces sphères allant en diminuant. Calculer la limite de la somme de leurs volumes.

Rép. $V = \frac{4}{3}\pi \frac{a^2 b^3}{4a^2 + 3b^2}$, a étant le rayon de base du cône et b sa hauteur.

36. Quand un demi-cercle partagé en trois parties égales tourne autour de son diamètre : 1° la zone décrite par l'arc médian est équivalente à la somme des deux autres ; 2° le secteur sphérique médian est équivalent à la somme des deux autres ; 3° le segment sphérique médian est les $\frac{11}{5}$ de la somme des deux calottes extrêmes.

37. Partager une sphère en deux calottes qui soient dans le rapport $\frac{m}{n}$ par un plan perpendiculaire à un diamètre donné.

38. Inscrire à une sphère un cône droit équivalent au segment adjacent à la base de ce cône.

39. Inscrire à une demi-sphère un cylindre droit tel que le volume de la calotte ayant pour base la base du cylindre non située dans le plan de la base de la demi-sphère soit le $\frac{1}{3}$ de celui du cylindre.

40. Quelle est la calotte sphérique de volume maximum et de surface donnée et inversement quelle est la calotte sphérique de volume donné et de surface minimum ?

41. On considère un demi-cercle de diamètre AB et les tangentes en A et B. En quel point M du demi-cercle faut-il mener une tangente pour que les volumes engendrés par les triangles mixtilignes formés par le demi-cercle et les tangentes en A, M, B, en tournant autour de AB, soient entre eux dans le rapport $\frac{m^3}{n^3}$?

42. On considère un demi-cercle de diamètre AB et la tangente BM ; en quel point P du demi-cercle faut-il mener une tangente PM rencontrant en M la tangente en B, pour que la figure APMB tournant autour de AB engendre un volume donné πa^3 ?

43. Calculer le volume d'une lentille biconvexe connaissant les rayons R, R' des deux faces et son épaisseur e.

$$V = \frac{\pi}{12} \frac{e^2}{R + R' - e} [e^2 - 4(R + R')e + 12 RR'].$$

44. Un cône est circonscrit à deux sphères de rayons R, R' tangentes extérieurement. Quel est le volume compris entre ces trois surfaces ?

$$V = \frac{4}{3}\pi\frac{R^2 R'^2}{R + R'}.$$

Ce volume est la moitié du volume compris entre le cône et la sphère qui passe par les cercles de contact des deux premières.

LIVRE VIII

COURBES USUELLES

CHAPITRE PREMIER

ELLIPSE

209. *On appelle* ELLIPSE *une courbe plane telle que la somme des distances de chacun de ses points à deux points fixes, situés dans son plan, soit constante.*

Les deux points fixes sont nommés les *foyers* de l'ellipse, les distances d'un point de la courbe aux foyers se nomment les *rayons vecteurs* de ce point. En appelant F et F′ les foyers d'une ellipse et $2a$ la somme constante des rayons vecteurs, on aura, pour chaque point de l'ellipse,

$$MF + MF' = 2a.$$

210. *Construction d'une ellipse.* — 1° *D'un trait continu.* — Imaginons (fig. 131) un fil de longueur donnée égale à $2a$ et dont les extrémités sont fixées aux deux points F et F′; la pointe M d'un crayon se déplace en maintenant le fil tendu. Cette pointe tracera sur le papier une ellipse ayant pour foyers F et F′; c'est le procédé employé par les jardiniers pour tracer des ellipses qu'ils nomment des *ovales*. En réalité, les extrémités du fil étant fixées sur le papier (ou

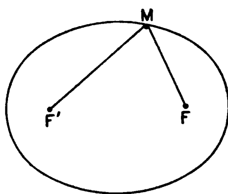


Fig. 131.

sur le sol) à l'aide de deux pointes (ou de deux piquets) le tracé doit être fait en deux fois.

Si l'on veut faire le tracé en une seule fois, il faut entourer les deux pointes d'un fil *sans fin* de longueur égale à $2a + 2c$.

2° *Construction par points.* — A partir du milieu O de FF′ (fig. 132) portons sur cette droite, dans les deux sens, $OA = A'O = a$. Soit P un point quelconque de AA′; on a $A'P + PA = 2a$.

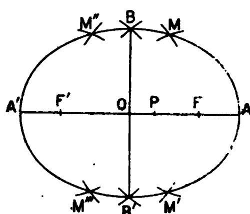


Fig. 132.

On peut donc supposer l'un des rayons vecteurs égal à PA, l'autre égal à PA′; d'après cela, de F comme centre avec PA comme rayon et de F′ comme centre avec PA′ pour rayon, traçons deux cercles; ces cercles se couperont en deux points M, M′ symétriques par rapport à AA′, pourvu que l'on ait

$$| A'P - PA | < FF' < A'P + PA.$$

On doit donc supposer $FF' < AA'$ ou $c < a$, en posant $FF' = 2c$; la seconde condition peut s'écrire : $FF' > 2OP$ ou $OP < OF$, en supposant, ce qui est permis, P entre O et A.

Si l'on supposait $c = a$, c'est-à-dire A confondu avec F et A′ avec F′, les cercles auxiliaires seraient toujours tangents entre eux et, au lieu d'une courbe, on obtiendrait le segment A′A, que l'on peut appeler *une ellipse infiniment aplatie*.

On peut permuter les rayons, c'est-à-dire décrire, de F′ comme centre, un cercle de rayon PA et, de F comme centre, un cercle de rayon A′P; on aura deux nouveaux

[illegible] M″, M‴ symé-
[illegible] points M
[illegible] ndiculaire au
[illegible] M′, M″, M‴
[illegible] point O.
[illegible] on obtien-
[illegible] nts obtenus,
[illegible] B′ que l'on
[illegible] ire quand les
[illegible] et par les
[illegible] point P vient
[illegible] rrespondants
[illegible]

[illegible] *étrie* AA′, BB′
[illegible] *son centre.*

[illegible]

[illegible] $= a$, OB $= b$,
[illegible]

[illegible]

[illegible] on le désigne
[illegible] ellipse, $e < 1$.

[illegible] $c = ae$.

[illegible] onfondent et
[illegible]
[illegible] $2a$ se nomme

le *grand axe* et $BB' = 2b$, le *petit axe* de l'ellipse; enfin $2c$ se nomme la *distance focale*.

On nomme *cercles directeurs* les cercles décrits des foyers comme centres avec $2a$ pour rayon, *cercle principal* le cercle décrit sur AA' comme diamètre.

Nous représenterons par (F) le cercle directeur de centre F et par (F') celui qui a pour centre F'.

212. Problème. — *Trouver les points d'intersection d'une droite et d'une ellipse, dont on connaît les foyers et le grand axe.*

Soit (fig. 133) X'X la droite donnée; il s'agit de trouver les points de cette droite dont la somme des distances à F et F' soit égale à $2a$. Soit M un point de X'X tel que

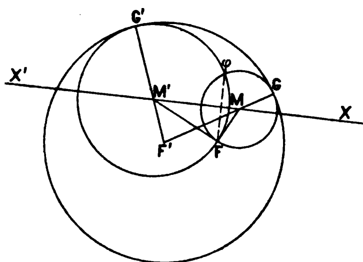


Fig. 133.

$$F'M + MF = 2a.$$

Si l'on prolonge F'M d'une longueur MG égale à MF, on aura $F'G = F'M + MF = 2a$; d'où il résulte que le cercle de centre M et de rayon MF sera tangent intérieurement au cercle directeur (F'). Mais tout cercle ayant son centre sur X'X et passant par F passe aussi par le point φ symétrique de F par rapport à X'X; et réciproquement, tout cercle passant par les deux points F et φ a son centre sur X'X. D'autre part, soit G le point de contact d'un cercle passant par les deux points F et φ et tangent *intérieurement* au cercle (F'); son centre M sera à l'intersection de X'X avec F'G, *entre* F' et G et l'on aura

$$F'G = F'M + MG = F'M + MF;$$

le point M sera donc un point de l'ellipse. On en conclut que la droite X′X rencontre l'ellipse en autant de points que l'on pourra mener de cercles passant par F et φ et tangents au cercle (F′).

Le point F est à l'intérieur du cercle (F′); le problème ne sera donc possible que si φ est aussi à l'intérieur de (F′) et, dans ce cas, il y a deux points d'intersection ; si φ est sur le cercle directeur (F′), il n'y a plus qu'un seul point d'intersection, la droite est alors *tangente* à l'ellipse, comme cela résulte du théorème suivant [214]. Enfin, lorsque φ est à l'extérieur du cercle directeur (F′), la droite ne coupe pas l'ellipse.

REMARQUE. — Une droite quelconque tracée dans le plan d'une ellipse peut donc couper cette courbe en *deux points au plus*. L'ellipse est une courbe *convexe*.

213. *Conditions pour qu'un point soit intérieur ou extérieur à une ellipse donnée.*

Une ellipse partage le plan dans lequel elle est tracée en deux régions; celle de ces régions qui comprend le

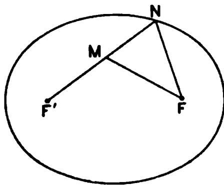


Fig. 134.

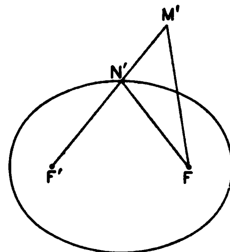


Fig. 135.

centre de l'ellipse est dite *intérieure* à l'ellipse ; l'autre région est la région *extérieure*.

Cela posé, soit (fig. 134) M un point à l'intérieur de

l'ellipse de foyers F, F′ et de grand axe $2a$. Le rayon vecteur MF′ coupe l'ellipse en N et l'on a

$$MF + MF' < NF + NM + MF',$$

ou

$$MF + MF' < NF + NF',$$

c'est-à-dire

$$MF + MF' < 2a.$$

Considérons en second lieu un point M′ (fig. 135) situé à l'extérieur de la même ellipse; M′F′ coupe l'ellipse en N′ et l'on a

$$M'F + M'F' > N'F + N'F',$$

ou

$$M'F + M'F' > 2a.$$

Ainsi la somme des rayons vecteurs d'un point du plan de l'ellipse donnée est inférieure, égale ou supérieure à $2a$ suivant que ce point est à l'intérieur de l'ellipse, sur cette ellipse ou à l'extérieur.

Les réciproques sont vraies : si la somme des rayons vecteurs de M est moindre que $2a$, M est à l'intérieur; si elle est égale à $2a$, M est sur l'ellipse; si elle est supérieure à $2a$, M est extérieur.

Il en résulte encore que l'ellipse considérée est le lieu géométrique des points du plan dont la somme des distances aux deux foyers est égale à $2a$.

214. *Tangente à l'ellipse.* — Soient (fig. 136) M et M′ deux points d'une ellipse ayant pour foyers F, F′ et dont la longueur du grand axe égale $2a$. Si l'on prolonge F′M d'une longueur $MG = MF$ et F′M′ d'une longueur $M'G' = M'F$ on a $F'G = F'G' = 2a$ et le cercle (F′) est tangent au

cercle ayant pour centre M et pour rayon MF, ainsi qu'au cercle ayant pour centre M′ et pour rayon M′F.

Or ces deux derniers cercles sont précisément les deux

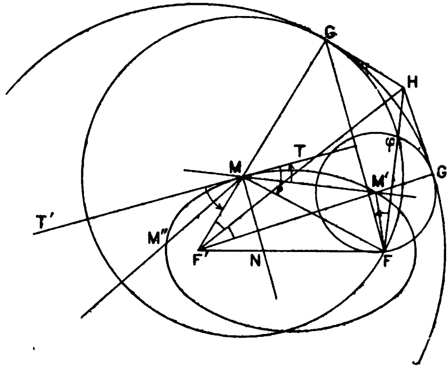


Fig. 136.

cercles tangents au premier et menés par F et son symétrique φ par rapport à la droite MM′; il en résulte que la droite Fφ passe par le point de concours H des tangentes GH, G′H, point qui n'est autre que le centre radical des trois cercles. Cela posé, si MT est la perpendiculaire à FG issue de M, les angles TMM′ et GFH sont égaux, comme ayant leurs côtés perpendiculaires. Supposons que le point M′, en cheminant sur l'ellipse, vienne se confondre avec M; l'angle GF′G′ tendra évidemment vers zéro et il en sera de même de sa moitié GF′H, ce qui exige que le segment de tangente GH tende vers zéro, et alors l'angle GFH tendra aussi vers zéro et, enfin, son égal TMM′ aura aussi pour limite zéro. En d'autres termes, quand le point M′ tend vers le point M, la sécante MM′ tend à prendre une position limite qui est celle de la droite TMT′. (On arriverait à la même conclusion si le point M″ s'approchait indéfiniment du point M; on verrait que l'angle T′MM″

tend vers zéro, M' et M'' étant supposés de part et d'autre de M sur l'arc d'ellipse $M'MM''$.)

L'ellipse a donc une tangente en chacun de ses points M; cette tangente est la bissectrice *extérieure*, en M, du triangle MFF', puisque c'est la bissectrice de l'angle FMG. On énonce en abrégé ce résultat sous cette forme :

La tangente en un point d'une ellipse fait des angles égaux (et de sens contraires) avec les rayons vecteurs de ce point, qu'on nomme le point de contact de la tangente.

La normale en M est la bissectrice MN de l'angle FMF'.

215. **Théorème.** — 1° *Le lieu des symétriques d'un foyer par rapport aux tangentes à une ellipse est le cercle directeur relatif à l'autre foyer;*

2° *Le lieu des projections d'un quelconque des deux foyers sur ces tangentes est le cercle principal.*

En effet, soit M (fig. 137) un point d'une ellipse ayant pour foyers F, F'. Si nous prolongeons F'M d'une longueur $MG = MF$, $F'G$ sera égal à $2a$; nous avons vu que la tangente en M est la droite MT perpendiculaire au milieu de FG; donc G est le symétrique de F par rapport à MT ; ce qui prouve que le symétrique du foyer F par rapport à une tangente quelconque est un point du cercle directeur ayant pour centre le second foyer F'.

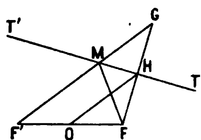


Fig. 137.

Réciproquement, soit G un point quelconque de ce cercle directeur; on a

$$F'F = 2c, \qquad F'G = 2a;$$

donc $F'F < F'G$, ce qui prouve que F' et G sont de part et d'autre de la perpendiculaire T'T au milieu de FG ; par

suite, T′T rencontre F′G en un point M situé *entre* F′ et G et l'on a

$$MF' + MF = MF' + MG = 2a.$$

Le point M est donc sur l'ellipse ; la tangente en M est la droite MT et le point G est le symétrique de F par rapport à cette tangente. Le lieu des symétriques de F est donc bien le cercle (F′).

Ensuite, soit H le pied de la perpendiculaire abaissée de F sur MT ; H est le milieu de FG ; on a donc

$$OH = \frac{1}{2} F'G = a$$

et l'on voit que le lieu de H est le cercle principal de l'ellipse.

Remarque. — Les demi-droites F′G et OH sont parallèles et de même sens ; le point F est le centre d'homothétie directe du cercle directeur (F′) et du cercle principal. Cette remarque nous servira plus loin.

Corollaire. — La droite MG est la distance du point M au cercle directeur (F′) ; on voit ainsi que l'ellipse est le lieu des points équidistants de ce cercle et du point F.

Donc, *le lieu des points équidistants d'un cercle et d'un point intérieur à ce cercle est une ellipse ayant pour foyers ce point et le centre du cercle, et pour longueur du grand axe le rayon du cercle donné,* qui n'est autre chose qu'un des cercles directeurs de cette ellipse.

216. Problème. — *Construire par tangentes une ellipse de foyers et de grand axe donnés.*

Traçons (fig. 138) le cercle directeur (F′) et le cercle principal. Soient FH et F′H′ deux demi-droites parallèles et de

même sens, H et H′ les points où elles rencontrent le cercle

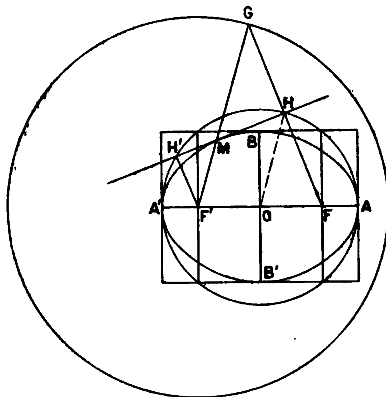


Fig. 138.

principal : HH′ est une tangente, dont le point de contact est à l'intersection de HH′ et de F′G. On aura par ce procédé autant de tangentes, avec leurs points de contact, qu'on voudra.

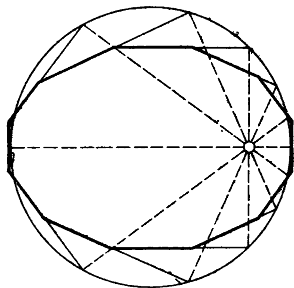


Fig. 139.

On remarquera que les tangentes aux extrémités de chaque axe sont perpendiculaires à cet axe ; on nomme, pour cette raison, *sommets* les extrémités de chaque axe. L'ellipse a quatre sommets.

Si l'on ne tient pas à construire les points de contact, il suffit de mener (fig. 139), par plusieurs points du cercle principal, les perpendiculaires aux droites qui joignent ces points à l'un des foyers. En d'autres termes, si le sommet d'un angle droit décrit le cercle principal et que l'un des côtés de cet angle passe constamment par l'un des foyers, l'autre côté *enveloppe* l'ellipse.

217. Problème. — *Mener à une ellipse une tangente par un point donné.*

1° *Le point donné est sur l'ellipse.* — On joint le point donné M (fig. 138) à l'un des foyers, F', par exemple ; et l'on mène OH parallèle à la demi-droite F'M, et de même sens, jusqu'au point de rencontre H avec le cercle principal ; la droite MH est la tangente demandée.

On peut aussi prolonger F'M jusqu'en G sur le cercle directeur (F') et joindre au point M le point H, intersection de la demi-droite FG avec le cercle principal.

2° *Le point donné n'est pas sur l'ellipse.* — Supposons le problème résolu et soit PM (fig. 140) une tangente à l'ellipse donnée. Le point G, symétrique du foyer F par rapport à cette tangente, est sur le cercle directeur (F') ; il est aussi sur le cercle décrit de P comme centre avec PF pour rayon. Je dis que, réciproquement, à tout point G commun à ces deux cercles correspond une tangente issue de P. En effet, remarquons d'abord que $F'F = 2c$ et $F'G = 2a$; donc $F'F < F'G$, ce qui prouve que F' et G sont de part et d'autre de la perpendiculaire abaissée de P sur FG, laquelle passe par le milieu de FG ; d'où il résulte que cette perpendiculaire rencontre F'G en un point M situé entre F' et G, et, par conséquent, tel que $F'M + MG = 2a$; donc $MF' + MF = 2a$. Le point M est donc un point de l'ellipse donnée et PM étant la bissectrice de l'angle FMG est la tangente en M. Le problème a autant de solutions que les deux cercles tracés ont de points communs.

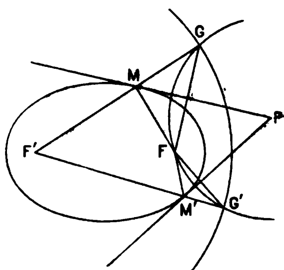


Fig. 140.

Discussion. — 1° Les conditions pour que les deux cercles se coupent en deux points distincts, sont :

$$2a < PF + PF',$$
$$PF < PF' + 2a,$$
$$PF' < PF + 2a.$$

La première condition exprime que le point P doit être *extérieur* à l'ellipse donnée. Je dis que cette condition *nécessaire* est *suffisante*. En effet, supposons-la vérifiée et soit, pour fixer les idées : $PF \leqq PF'$; la seconde inégalité est alors vérifiée ; quant à la troisième, si le point P n'est pas sur l'axe focal, le triangle PFF' donne

$$PF' < PF + 2c < PF + 2a\ ;$$

et si le point P est sur l'axe focal, étant extérieur à l'ellipse, il n'est pas entre F et F', on a donc

$$PF' - PF = 2c;$$

d'où

$$PF' = PF + 2c < PF + 2a,$$

et, par conséquent, l'inégalité est encore vérifiée.

2° Le point F étant à l'intérieur du cercle directeur de centre F', si les deux cercles sont tangents, ils sont tangents intérieurement et, dans ce cas, on a :

$$PF' = 2a - PF,$$

ou $PF' + PF = 2a$; le point P est alors sur l'ellipse et les deux tangentes se confondent.

En résumé, on peut mener à une ellipse deux tangentes distinctes par un point extérieur ; on peut en mener une seule par un point pris sur l'ellipse et le point de contact se confond alors avec le point donné ; enfin, on n'en peut mener aucune par un point intérieur.

218. Problème. — *Mener à une ellipse, donnée par ses foyers et son grand axe, une tangente parallèle à une droite donnée.*

Le symétrique d'un foyer, par rapport à une tangente parallèle à la direction donnée, est à l'intersection du cercle directeur ayant pour centre l'autre foyer et de la perpendiculaire à la direction donnée menée par le premier foyer.

Soit X'X (fig. 141) la direction donnée ; le foyer F est à l'intérieur du cercle directeur (F') ; donc la perpendiculaire GG' menée par F à X'X coupe le cercle directeur en deux points distincts G, G'. On voit comme plus haut que la perpendiculaire élevée au milieu de FG est tangente à l'ellipse au point M où elle rencontre F'G ; de même, la perpendiculaire élevée au milieu de FG' est tangente en M', point où elle rencontre F'G'. Le problème a donc toujours deux solutions.

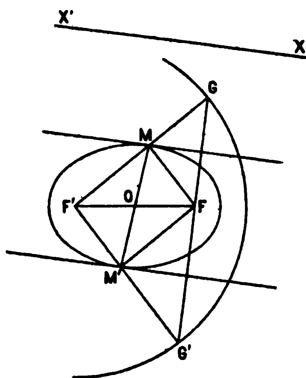


Fig. 141.

Les triangles F'GG', MFG, M'FG' étant isocèles, les angles MFG et M'G'F sont égaux, ainsi que MGF et M'FG' ; la figure MFM'F' est un parallélogramme et, par suite, les points M, M' sont diamétralement opposés. Donc :

Les points de contact de deux tangentes parallèles d'une ellipse, sont des points diamétralement opposés.

219. **Théorème de Poncelet.** — *Les tangentes à une ellipse issues d'un point extérieur font des angles égaux avec les rayons vecteurs de ce point.*

Soient (fig. 142) PM, PM′ les tangentes menées de P à une ellipse de foyers F, F′ et de grand axe $2a$. Soient G le symétrique de F par rapport à PM, G′ le symétrique de F′ par rapport à PM′. Le point G est sur le prolongement de F′M et G′ sur le prolongement de FM′. Traçons les droites qui joignent le point P aux points F, G, F′, G′;

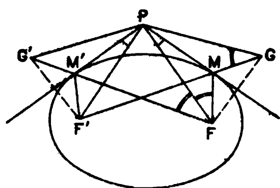


Fig. 142.

les triangles PFG′ et PGF′ sont égaux comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun; donc $\widehat{F'PG} = \widehat{FPG'}$, d'où l'on tire $\widehat{FPG} = \widehat{F'PG'}$ et, par suite, PM étant la bissectrice de $\widehat{FPG}$ et PM′ celle de $\widehat{F'PG'}$, on a

$$\widehat{FPM} = \widehat{M'PF'}.$$

On peut donc dire que les droites PF, PF′ et les droites PM, PM′ forment deux couples antiparallèles.

Remarquons encore que, si PM est une tangente et si l'on mène PM′ telle que $\widehat{M'PF'} = \widehat{FPM}$, PM′ sera aussi tangente à la même ellipse.

Corollaires. — I. — Les angles PGF′ et PFG′ sont égaux; mais $\widehat{PGM} = \widehat{PFM}$; donc FP est la bissectrice de l'angle M′FM. Par conséquent,

Les tangentes issues d'un point sont vues d'un foyer sous des angles égaux.

II. — Supposons que l'angle M′PM soit droit, il en est alors de même de l'angle F′PG et, par suite,

$$\overline{PF'}^2 + \overline{PG}^2 = \overline{F'G}^2;$$

d'où :

$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = 4a^2.$$

Et réciproquement. Donc :

Le lieu des points d'où l'on voit une ellipse sous un angle droit est un cercle concentrique à l'ellipse. On le nomme le cercle *orthoptique*.

Les sommets C, C', D, D' (fig. 143) du rectangle formé par les tangentes menées à l'ellipse par les quatre sommets, appartiennent au cercle orthoptique, qui est ainsi déterminé. Son rayon est égal à

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

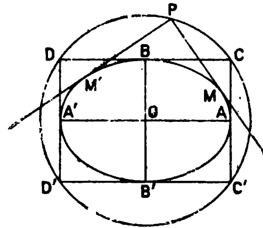


Fig. 143.

III. — *La portion d'une tangente mobile comprise entre deux tangentes fixes est vue d'un foyer sous un angle constant.*

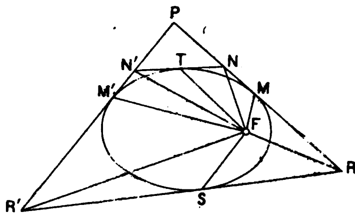


Fig. 144.

En effet, FN (fig. 144) étant la bissectrice de $\widehat{TFM}$ et FN' celle de $\widehat{TFM'}$, on a :

$$\widehat{NFN'} = \frac{1}{2} \widehat{MFM'}.$$

On verra de même que $\widehat{RFR'}$ est la moitié de l'angle rentrant MFM', ou, ce qui revient au même :

$$\widehat{RFR'} = 180^\circ - \frac{1}{2} \widehat{MFM'}.$$

220. **Théorème.** — *Le produit des distances des deux foyers à une tangente quelconque de l'ellipse est constant et égal à* b^2.

En effet, si nous considérons (fig. 145) une tangente quelconque et la tangente parallèle, ces deux droites et les perpendiculaires qui leur sont menées par les foyers forment un rectangle PP′Q′Q ayant pour centre le centre de l'ellipse; donc

$$QF = F'P'$$

et, par suite,

Fig. 145.

$$FP \times F'P' = FP \times QF.$$

Mais les points P et Q appartiennent au cercle principal; donc

$$FP \times QF = A'F \times FA,$$

et, par suite,

$$FP \times F'P' = A'F \times FA = (a + c)(a - c) = a^2 - c^2,$$

ou

$$FP \times F'P' = b^2.$$

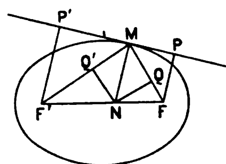


Fig. 146.

221. **Théorème.** — *La projection de la normale sur le rayon vecteur est constante.*

En effet, soit (fig. 146) MN la portion de normale comprise entre son point d'incidence M et le point N où elle rencontre le grand axe. Soient MQ = MQ′ les projections de MN sur MF et MF′, on a

$$MQ = MN \times \frac{FP}{MF},$$

$$MQ' = MN \times \frac{F'P'}{MF'};$$

d'où

$$\overline{MQ}^2 = \overline{MN}^2 \cdot \frac{b^2}{MF \times MF'}.$$

Mais [G. P. 167]

$$MF.MF' = \overline{MN}^2 + F'N.NF;$$

de plus

$$\frac{F'N}{MF'} = \frac{NF}{MF} = \frac{c}{a},$$

d'où

$$MF.MF' = \overline{MN}^2 + \frac{c^2}{a^2} \cdot MF.MF'$$

et enfin

$$\overline{MN}^2 = MF.MF'. \frac{b^2}{a^2};$$

ce qui donne

$$\overline{MQ}^2 = \frac{b^4}{a^2},$$

d'où

$$MQ = \frac{b^2}{a}.$$

$\frac{b^2}{a}$ se nomme le *paramètre*.

Si l'on suppose (fig. 147) le rayon vecteur MF perpendiculaire

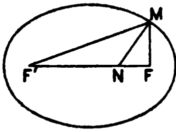


Fig. 147.

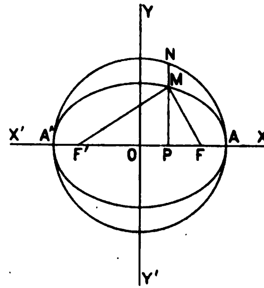


Fig. 148.

au grand axe, la projection de la normale sur MF sera précisément MF ; donc le paramètre $\frac{b^2}{a}$ est alors égal à MF.

ÉQUATION DE L'ELLIPSE

222. Soient (fig. 148) X'X et Y'Y les deux axes de symétrie de l'ellipse, le premier étant l'axe focal.

Posons $\overline{OP} = x$, $\overline{PM} = y$, x étant positif dans le sens $\overline{OX}$ et y dans le sens $\overline{OY}$ ($\overline{OP}$ s'appelle l'*abscisse* et $\overline{PM}$ l'*ordonnée* du point M).

On a :

$$MF + MF' = 2a,$$

$$\overline{MF'}^2 - \overline{MF}^2 = \overline{PF'}^2 - \overline{PF}^2 = 4cx ;$$

d'où

$$MF' - MF = \frac{2cx}{a},$$

et, par suite,

$$MF = a - \frac{cx}{a}, \qquad MF' = a + \frac{cx}{a}.$$

D'autre part,

$$\overline{MF}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{PF}^2 = y^2 + (c - x)^2 :$$

donc

$$y^2 + (c - x)^2 = \left(a - \frac{cx}{a}\right)^2.$$

Développant et simplifiant, il vient, en se rappelant que $a^2 - c^2 = b^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Corollaire. — On a

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \frac{b^2}{a^2}(a - x)(a + x),$$

ou

$$\overline{PM}^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot A'P.PA = \frac{b^2}{a^2} \cdot \overline{PN}^2.$$

Donc

$$PM = \frac{b}{a} \cdot PN,$$

PN étant l'ordonnée du cercle principal.

On verrait de même (fig. 149) que

$$QM = \frac{a}{b} . QR,$$

Q et R étant les points de rencontre de BB′ et du cercle

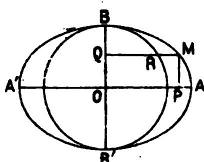


Fig. 149.

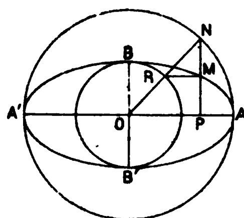


Fig. 150.

décrit sur BB′ comme diamètre (cercle secondaire) avec la parallèle à A′A issue du point M.

De là une nouvelle construction par points de l'ellipse :

Ayant tracé (fig. 150) les deux cercles de diamètres AA′ et BB′, on mène un rayon ON du premier cercle, et on projette le point R où ce rayon rencontre le second cercle, sur l'ordonnée NP ; le lieu de M est l'ellipse ayant pour axes AA′ et BB′.

223. **Théorème.** — *Si les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites rectangulaires, tout point de cette droite décrit une ellipse ayant pour axes de symétrie ces deux droites fixes, et pour demi-longueurs d'axes les distances du point décrivant aux extrémités de la droite.*

En effet, supposons (fig. 151 et 152) $MR = a$, $MQ = b$, les points Q et R étant assujettis à glisser sur X′X et sur Y′Y. Si l'on mène OM′ parallèle à RM, M′ étant le point de rencontre de cette parallèle avec la perpendiculaire MP à X′X, on a

$$\frac{MP}{M'P} = \frac{QP}{OP} = \frac{QM}{RM} = \frac{b}{a}.$$

Mais M′ décrit un cercle de rayon a, donc M décrit une ellipse d'axes $2a$, $2b$.

Cette propriété donne un nouveau moyen pratique pour

Fig. 151.

Fig. 152.

construire autant de points qu'on veut d'une ellipse ayant des axes donnés d'avance.

Il est facile de généraliser la proposition précédente. Supposons (fig. 153) qu'un triangle ABM de forme invariable

Fig. 153.

se déplace dans son plan de façon que deux de ses sommets décrivent des droites fixes $x'x$, $y'y$; le troisième sommet M décrira une ellipse.

En effet, le cercle circonscrit au triangle OAB a un diamètre invariable, puisque le côté AB et l'angle opposé AOB sont constants. Considérons ce cercle comme lié invariablement

au triangle ABM. Les droites OX, OY qui joignent le point O aux extrémités Q et R du diamètre passant par M sont rectangulaires et fixes, car les arcs AQ et BR sont invariables ; les longueurs MQ, MR sont aussi invariables, donc le point M décrit une ellipse dont MR et MQ sont les demi-longueurs d'axes, X'X et Y'Y étant d'ailleurs les axes de symétrie. La démonstration s'applique au cas où M serait sur la droite AB.

ELLIPSE CONSIDÉRÉE COMME PROJECTION D'UN CERCLE

224. Nous avons vu plus haut qu'il y a une correspondance très simple entre les points d'une ellipse et les points du cercle principal; que si, de chaque point M de l'ellipse (fig. 154), on abaisse la perpendiculaire MP sur le grand axe, M' étant le

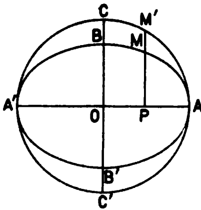


Fig. 154.

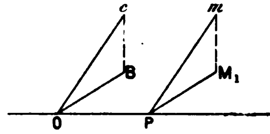


Fig. 155.

point d'intersection du cercle principal et de la demi-droite PM, on a

$$MP = \frac{b}{a} M'P.$$

D'après cela, si l'on fait tourner le cercle principal autour de AA' (fig. 155), de façon que le point C, correspondant à B, vienne prendre une position c telle que c se projette en B, M' viendra en m dont la projection sera précisément M ; car, si l'on nomme, pour un instant, M_1 la projection de m sur le plan de l'ellipse, on a, les triangles cOB et mPM_1 étant semblables :

$$\frac{PM_1}{Pm} = \frac{OB}{Oc} = \frac{b}{a};$$

donc $PM_1 = PM$.

L'ellipse donnée est donc la projection orthogonale sur son plan, d'un cercle égal au cercle principal et obtenu en faisant tourner celui-ci autour de AA′ d'un angle convenable (*). De là résulte ce théorème important:

La projection orthogonale d'un cercle sur un plan quelconque est une ellipse dont le grand axe est la projection du diamètre du cercle qui est parallèle au plan de projection, le petit axe étant la projection du diamètre du cercle qui est perpendiculaire au premier.

Démonstration géométrique (**). — On peut supposer que le plan de projection passe par le centre du cercle, puisque les projections orthogonales d'une même figure sur des plans parallèles sont égales.

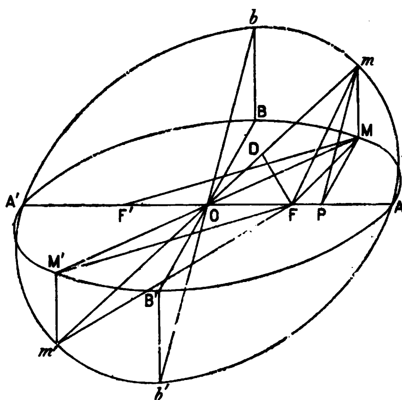


Fig. 156.

Soient (fig. 156) AA′ le diamètre du cercle qui est dans le plan de projection, bb' le diamètre perpendiculaire, BB′ la projection de ce dernier. Prenons, sur AA′, F′O = OF = Bb.

(*) C'est-à-dire d'un angle θ tel que $\cos\theta = \frac{b}{a}$.

(**) Cette démonstration est due à M. Courcelles, ancien professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

Soient m, m' deux points diamétralement opposés du cercle, M et M' leurs projections ; soient enfin FD la perpendiculaire abaissée de F sur mm' et P la projection de M sur AA'. Considérons les deux triangles rectangles semblables mMP et bBO ; ils donnent :

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{B}b} = \frac{\mathrm{P}m}{\mathrm{O}b}.$$

D'autre part, les triangles rectangles ODF et OPm sont aussi semblables et donnent :

$$\frac{\mathrm{P}m}{\mathrm{O}m} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{OF}}$$

ou, ce qui revient au même :

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{P}m}{\mathrm{O}b} = \frac{\mathrm{DF}}{\mathrm{B}b}.$$

La comparaison des proportions (1) et (2) donne DF $=$ Mm ; les deux triangles rectangles DFm et MmF sont donc égaux comme ayant l'hypoténuse commune et un côté de l'angle droit égal, et, par suite,

$$\mathrm{MF} = \mathrm{D}m.$$

En considérant les deux triangles DFm' et M'm'F, on voit de même que

$$\mathrm{M'F} = m'\mathrm{D},$$

ou

$$\mathrm{MF'} = m'\mathrm{D}.$$

Donc

$$\mathrm{MF} + \mathrm{MF'} = m'm = 2a.$$

Le lieu du point M, c'est-à-dire la projection du cercle, est donc l'ellipse qui a pour grand axe AA' et pour foyers F, F'.

225. Cela posé, toute droite Δ tracée dans le plan du cercle se projette suivant une droite D (fig. 157) ; au lieu de regarder

la droite D comme projection de Δ, on peut la regarder comme la transformée du rabattement D_1 de Δ autour de AA'; et inversement, étant donnée la droite D, on peut trouver la

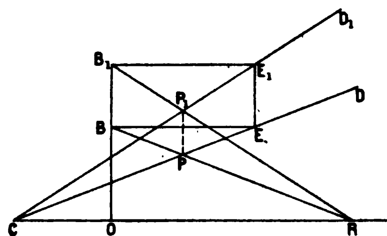


Fig. 157.

transformée D_1 : il suffit de trouver les transformés de deux points. Si la droite D_1 rencontre l'axe AA' en C, le point C ne changera pas et il suffira de transformer un autre point. Soient $OB = b$ et $OB_1 = a$; prenons sur CD_1 le point E_1 situé à la distance a du grand axe ; son transformé E sera à la distance b du même axe ; on l'obtiendra donc à l'aide de la parallèle au grand axe, menée par B. La droite CE est la transformée de CE_1.

On peut encore opérer ainsi :

Traçons la droite qui joint B_1 à un point quelconque P_1 de D_1 et soit R le point de rencontre avec le grand axe : B_1R se transforme en BR ; le point P, transformé de P_1, s'obtient donc en prenant l'intersection de BR avec la perpendiculaire P_1P au grand axe. Cette construction servira surtout si le point C est hors des limites du dessin.

En faisant les constructions en sens inverse, on passera d'une droite appartenant au plan de l'ellipse à sa transformée relative au plan du cercle. A une tangente au cercle correspond une tangente à l'ellipse ; une sécante au cercle se transforme en une sécante à l'ellipse, les points d'intersection se correspondant sur des perpendiculaires au grand axe.

226. Applications. — 1° *Mener par un point donné une tangente à une ellipse dont on donne les deux axes.*

Soit (fig. 158) M le point donné, construisons son transformé M_1 et menons par ce point les tangentes au cercle principal

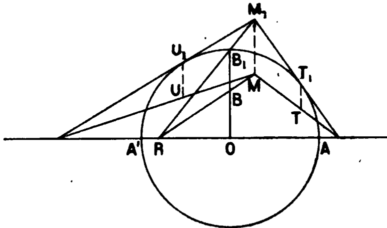


Fig. 158.

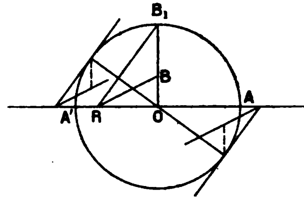


Fig. 159.

M_1T_1, M_1U_1; il suffira de construire les transformées MT, MU.

2° *Mener à l'ellipse donnée une tangente parallèle à une direction donnée.*

Soit BR (fig. 159) la direction donnée ; on mène au cercle principal des tangentes parallèles à la direction B_1R, d'où l'on déduit aisément les tangentes demandées.

3° *Intersection d'une droite et d'une ellipse donnée par ses axes.*

On détermine l'intersection de la transformée de la droite avec le cercle principal et l'on revient à la première figure.

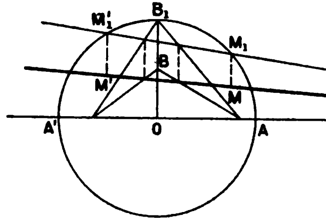


Fig. 160.

Des points obtenus M_1, M'_1 (fig. 160) on déduit immédiatement les points cherchés M, M'.

EXERCICES

1. Construire une ellipse, connaissant : un foyer, une extrémité du petit axe, un point de l'ellipse ou une tangente.

2. Une droite AB de longueur constante se déplace de telle sorte que l'extrémité A parcoure un cercle Γ de rayon égal à AB, et l'extrémité B, une droite passant par le centre de Γ ; le lieu décrit par un point de AB est une ellipse [223]. — Car le symétrique de B par rapport à A décrit une droite.

3. **Il y a une infinité de triangles circonscrits à une ellipse et inscrits à l'un des cercles directeurs.**

4. Soient P,P' les projections des foyers F,F' d'une ellipse sur la tangente en un point M ; les droites PF', P'F se coupent au milieu de la normale en M.

5. Soient C et C' les points où une tangente à une ellipse rencontre les tangentes aux extrémités du grand axe AA' ; soient D et D' les points où elle rencontre les tangentes aux extrémités du petit axe BB'.

1° Le produit AC $\times$ A'C' est constant, ainsi que BD $\times$ B'D'.

2° Le cercle de diamètre CC' passe par les deux foyers.

3° Le cercle de diamètre DD' est orthogonal à tous les cercles passant par les deux foyers. En d'autres termes, le cercle passant par les deux foyers et par D (ou par D') est tangent à DD'.

Voir *Bul. des sc. math. et ph. élém.*, 4e année, p. 140.

Application. — Construire une ellipse, connaissant une tangente et les extrémités d'un axe.

6. M et M' étant deux points d'une ellipse, on détermine sur MM' le point P tel que FP + PF' soit minimum. En menant la tangente MT en M, on a : $\widehat{TMM'} = \dfrac{\widehat{MFP} + \widehat{MF'P}}{2}$.

CHAPITRE II

HYPERBOLE (*)

227. *On appelle* HYPERBOLE *une courbe plane telle que la différence des distances de chacun de ses points à deux points fixes situés dans son plan soit constante.*

Les points fixes sont appelés *foyers*. On voit immédia-

(*) L'hyperbole ne figure pas explicitement dans le programme de l'Enseignement moderne; mais il est nécessaire d'en connaître les principales propriétés pour comprendre le théorème de Dandelin et pour construire, en Géométrie descriptive, la section d'un cône de révolution par un plan quelconque.

tement que l'hyperbole se compose de deux branches distinctes, situées chacune dans l'une des deux régions du plan déterminées par la perpendiculaire élevée au milieu de la droite qui joint les deux foyers.

228. *Construction d'une hyperbole d'un trait continu.* — Imaginons qu'une règle F′D (fig. 161) de longueur plus grande que la distance FF′ soit assujettie à tourner autour de F′ ; à l'autre extrémité est fixé un fil de longueur constante qui s'appuie en partie sur la règle, en passant dans un anneau mobile qui embrasse cette règle ; l'autre extrémité du fil est fixée au second foyer F ; la longueur de la règle surpasse de $2a$ la longueur totale du fil. Si l'anneau curseur M glisse le long de la règle de façon que les deux brins MF et MD du fil soient constamment tendus, une pointe de crayon suivant l'anneau tracera sur le papier un arc d'hyperbole ayant pour foyers F et F′; car, pour chaque position de l'anneau, on a :

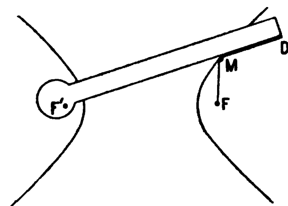


Fig. 161.

$$MF' - MF = (F'M + MD) - (MF + MD) = 2a.$$

La construction réussit, quelle que soit la longueur de la règle ; on obtient donc un arc dont les extrémités peuvent être, du moins théoriquement, à une distance aussi grande qu'on veut de F′. En renversant la disposition précédente, on obtiendra un autre arc symétrique du premier par rapport à la perpendiculaire élevée au milieu de FF′. On voit bien ainsi que l'hyperbole se compose de deux arcs *illimités*.

Construction par points. — On procède comme pour l'ellipse ; à partir du milieu O de FF' (fig. 162), prenons de part et d'autre sur cette droite $A'O = OA = a$. Soit P un point situé sur F'F, mais extérieur au segment A'A ; on a

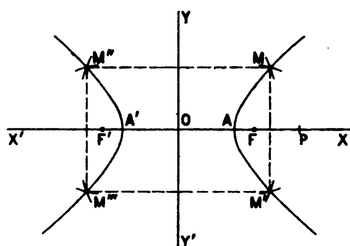


Fig. 162.

$$PA' - PA = 2a:$$

on décrira des arcs de cercles du point F comme centre avec PA pour rayon et du point F' comme centre avec PA' pour rayon, ce qui donnera deux points M, M' appartenant à l'hyperbole cherchée. En échangeant les centres des cercles auxiliaires et conservant les mêmes rayons, on aura deux autres points M'', M'''. Les quatre points ainsi obtenus sont les sommets d'un rectangle dont deux côtés sont parallèles à A'A et les deux autres perpendiculaires, pourvu que les cercles auxiliaires se coupent, c'est-à-dire pourvu que

$$A'A < F'F < A'P + AP,$$

ou

$$a < c < OP.$$

On doit donc supposer $c > a$ et prendre le point P sur la demi-droite FX. La construction réussit quelque loin que le point P soit du point O ; ce qui montre de nouveau qu'on obtiendra deux arcs illimités.

On voit que l'hyperbole a deux axes de symétrie, X'X et Y'Y, dont le point commun O est le centre de cette courbe. X'X se nomme l'axe *focal* ou l'axe *transverse ;* $2a$ est la longueur de cet axe.

Si l'on supposait $c = a$, les cercles auxiliaires seraient toujours tangents et la courbe dégénérerait en deux demi-droites FX, F'X', qui constituent ce qu'on peut appeler une hyperbole infiniment aplatie.

On nomme *cercle principal* le cercle décrit sur AA' comme diamètre, et *cercles directeurs* (F) et (F') les cercles de rayon $2a$ et ayant pour centres F et F'.

229. Problème. — *Trouver les points d'intersection d'une droite et d'une hyperbole dont on donne les foyers et l'axe focal.*

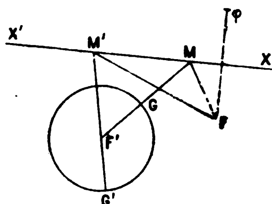


Fig. 163.

Soit (fig. 163) M un point commun à la droite X'X et à l'hyperbole ayant pour foyers F, F', et dont l'axe focal a pour longueur $2a$; si l'on prend sur MF' une longueur MG = MF, on aura, si MF' est supérieur à MF :

$$F'G = F'M - FM = 2a.$$

Si M' est un point commun tel que M'F' soit plus petit que M'F, on aura

$$F'G' = M'F - M'F' = 2a.$$

Donc, dans tous les cas, le point G ou G' sera sur le cercle directeur (F'). Soit φ le symétrique de F par rapport à X'X ; en raisonnant comme dans le cas de l'ellipse, on verra que le problème revient à construire un cercle passant par les deux points F et φ et tangent au cercle (F').

Le point F étant extérieur à ce cercle directeur, le problème a deux solutions si φ est aussi extérieur ; il n'en

a qu'une si φ est sur le cercle directeur et il n'en a aucune s'il est intérieur.

Mais il peut arriver que la droite $F\varphi$ soit tangente au cercle directeur (F'). Dans ce cas, il n'y a plus qu'un cercle tangent au cercle (F'); on peut voir que le second a dégénéré en une droite, ce qui exige que son centre ait disparu à l'infini. Si le point φ est le point de contact de $F\varphi$ avec (F'), les deux centres disparaissent à l'infini dans la direction perpendiculaire à $F\varphi$. Le problème peut donc présenter cinq cas :

1° La droite coupe l'hyperbole en deux points distincts.

2° Ces deux points se confondent si le point φ vient se placer sur (F'), mais la droite $F\varphi$ n'étant pas tangente à ce cercle.

3° La droite $F\varphi$ devient tangente au cercle (F') en un point autre que φ : un des points d'intersection disparaît à l'infini, l'autre point d'intersection restant à distance finie.

4° Si $F\varphi$ devient tangente en φ au cercle (F'), les deux points d'intersection disparaissent à l'infini ; ce cas ne peut arriver que si la droite X'X passe par le centre et est perpendiculaire à l'une des tangentes au cercle (F') menées par F. On dit alors que la droite X'X est *asymptote* et l'on voit que l'hyperbole a deux asymptotes.

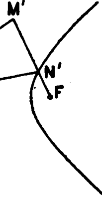
5° Le point φ est intérieur au cercle (F'); dans ce cas la droite X'X ne coupe pas l'hyperbole.

En résumé, une droite peut couper une hyperbole au plus en deux points distincts. L'hyperbole est une courbe *convexe*.

230. Problème. — *Reconnaître si un point est intérieur ou extérieur à une hyperbole donnée.*

Une hyperbole partage le plan dans lequel elle est

ns, celle qui
térieure, les
l'hyperbole.
e nous sup-
qui contient



165.

nche la plus
l et F' ; on a :

oint M' situé
droite M'F
point N' situé

Cette inégalité serait évidente si l'on avait

$$M'F' = M'F.$$

Les réciproques sont vraies. Ainsi un point est extérieur à l'hyperbole, sur la courbe ou intérieur, suivant que la différence des rayons vecteurs de ce point est inférieure, égale ou supérieure à $2a$. L'hyperbole donnée est donc le lieu des points dont la différence des rayons vecteurs relatifs aux deux foyers est égale à $2a$.

231. *Tangente à l'hyperbole.* — Soient (fig. 166) M, M' deux points appartenant à une même branche d'hyperbole dont les foyers sont en F et F' et dont l'axe transverse a pour longueur $2a$.

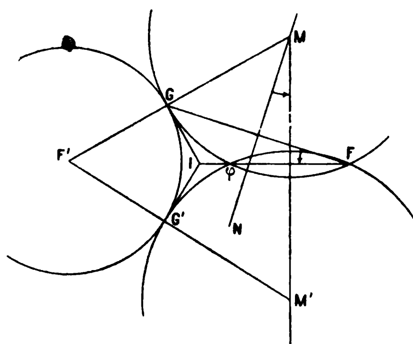


Fig. 166.

Supposons $F'M > FM$, $F'M' > FM'$; alors, si nous prenons, sur MF', $MG = MF$ et, sur $M'F'$, $M'G' = M'F$, on aura

$$F'G = F'G' = 2a,$$

et nous voyons que le cercle ayant pour centre M et pour rayon MF et le cercle ayant pour centre M' et pour rayon M'F sont tangents en G et G' au cercle direc-

teur (F′) ; de sorte que, φ étant le second point commun aux deux premiers cercles, la droite Fφ passera par le point I commun aux deux tangentes GI, G′I et, en faisant le même raisonnement que pour l'ellipse, on verra que si M′ tend vers M, la droite MM′ aura pour limite la perpendiculaire MN à FG, c'est-à-dire la bissectrice de l'angle FMG ou, si l'on préfère, la bissectrice *intérieure* de l'angle FMF′. Ainsi, *en chaque point d'une hyperbole, il y a une* TANGENTE, *qui est la bissectrice intérieure de l'angle des rayons vecteurs issus de ce point.*

On donne souvent à cette proposition un autre énoncé :

La tangente en chaque point d'une hyperbole fait des angles égaux (et de sens contraires) avec les rayons vecteurs de ce point.

La *normale* en M est la bissectrice extérieure de l'angle FMF′.

232. **Théorèmes.** — 1° *Le lieu des symétriques d'un foyer par rapport aux tangentes d'une hyperbole est le cercle directeur relatif à l'autre foyer;*

2° *Le lieu des projections d'un quelconque des deux foyers sur les tangentes est le cercle principal.*

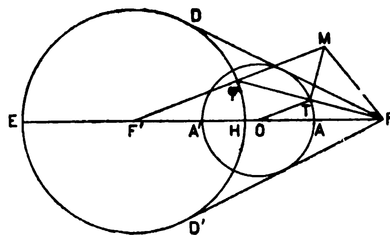


Fig. 167.

Mêmes démonstrations que pour l'ellipse ; toutefois pour que ces théorèmes soient exacts, il faut regarder les asymptotes comme des tangentes singulières, ainsi que nous allons l'expliquer.

Traçons (fig. 167) le cercle directeur relatif au foyer F′

et menons de F les tangentes FD, FD′ à ce cercle. Imaginons qu'un point parcoure le cercle directeur et soit φ l'une de ses positions. La droite $F'\varphi$ et la perpendiculaire au milieu de $F\varphi$ ne sont parallèles que si φ coïncide avec D ou D′. Par raison de symétrie, nous supposerons que φ décrive la demi-circonférence HDE. La droite $F'\varphi$ rencontre la perpendiculaire MT au milieu de $F\varphi$ en M; si φ est entre H et D, on a

$$MF' - MF = F'\varphi = 2a;$$

le point M est sur la branche voisine du foyer F, et MT est la tangente en M. Quand φ est en H, M est en A, la tangente en A est perpendiculaire à l'axe focal et, pour cette raison, le point A est un *sommet*. Si φ s'approche indéfiniment de D, le point M disparaît à l'infini.

Comme nous l'avons déjà vu, les points de rencontre de l'hyperbole et de la perpendiculaire au milieu de FD ont disparu à l'infini; cette droite est une asymptote. Le point T se meut sur le cercle principal et tend (fig. 168) vers le point L, milieu de FD.

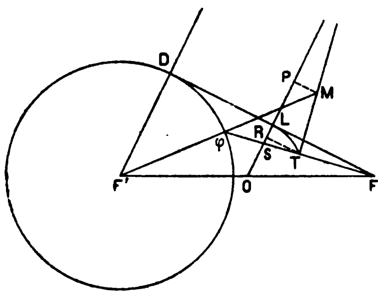


Fig. 168.

La distance TR de T à OL tend vers zéro; or OL rencontre $F\varphi$ en un point S situé entre O et L; l'angle LST est aigu; il en résulte que $MP < TR$; donc, quand le point φ s'approche indéfiniment de D, le point M s'éloigne indéfiniment et MP tend vers zéro.

Lorsque φ dépasse le point D, le point M passe sur l'autre branche, et la tangente devient de nouveau per-

E (fig. 167).
s deux som-
aux axes, on
considérées
oints de con-
directeurs et
lieux consi-

ne le moyen
ig. 169) avec

ropriété des
e préciser le

cle directeur
l'autre foyer,

nts également

distants de F et du cercle directeur considéré. Mais la propriété *ne s'applique pas à l'autre branche*. En effet, si nous prolongeons M'F' jusqu'en φ', M'F est bien égale à $M'\varphi'$, mais $M'\varphi'$ n'est pas la distance de M' au cercle directeur. On doit donc énoncer ce théorème :

Fig. 170.

Chaque branche d'une hyperbole est le lieu des points équidistants du foyer voisin et du cercle directeur relatif à l'autre foyer.

233. *Tracé des asymptotes.* — FD (fig. 171) étant comme plus haut l'une des tangentes menées du foyer F

Fig. 171.

Fig. 172.

au cercle directeur (F'), si l'on pose $FD = 2b$, on a

$$\overline{FF'}^2 = \overline{F'D}^2 + \overline{FD}^2,$$

c'est-à-dire

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Mais les triangles rectangles OAC et OLF, dans les-

quels $OA = OL = a$, sont égaux et, par suite, on a

$$OC = OF = c, \quad AC = FL = b.$$

On peut donc construire les asymptotes de la façon suivante :

On construit (fig. 172) un cercle sur FF′ comme diamètre et par A on mène la corde CC′ perpendiculaire à FF′. Les asymptotes sont les droites OC, OC′ ; ce sont les diagonales du rectangle $CC'C'_1C_1$, dont les côtés ont pour longueurs $2a$ et $2b$.

234. La longueur $2b$ s'appelle l'axe *imaginaire* ou l'axe *non transverse;* B et B′ *ne sont pas des points de la courbe.*

On dit que l'hyperbole est *équilatère* si $a = b$; dans ce cas, les asymptotes sont rectangulaires, et réciproquement.

Le rapport $\frac{c}{a}$ est l'*excentricité* e; on a, pour une hyperbole,

$$b = a\sqrt{e^2 - 1}.$$

Si l'hyperbole est équilatère, on a :

$$e = \sqrt{2}.$$

235. Problème. — *Mener par un point donné une tangente à une hyperbole dont on connaît les foyers et l'axe focal.*

1° *Le point donné* M *est sur l'hyperbole.* On procède comme pour l'ellipse. Si l'on mène (fig. 173) le rayon OH du cercle principal qui est parallèle à F′M et de même sens, MH sera la tangente en M.

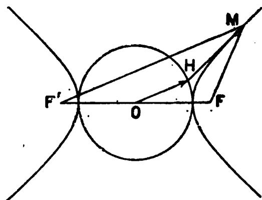


Fig. 173.

2° *Le point donné n'est pas sur la courbe.*

Soit (fig. 174) PM une tangente issue de P; le symé-

trique de F par rapport à cette tangente est un point du cercle directeur (F') ; il est donc à l'intersection de ce cercle et du cercle décrit de P comme centre avec PF comme rayon. Réciproquement, à tout point G commun à ces deux cercles correspond une tangente proprement dite ou une asymptote, passant par P ; ce dernier cas se présentera si le point G se confond avec le point de contact du cercle directeur et de l'une des tangentes à ce cercle menées par F, c'est-à-dire, en définitive, si le point donné P est sur l'une ou l'autre des asymptotes. Si l'on accepte les asymptotes comme des solutions du problème, il y aura autant de solutions que de points d'intersection des deux cercles considérés. Les conditions pour que les cercles se coupent en deux points, sont :

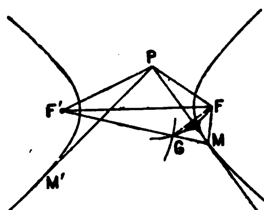


Fig. 174.

$$PF' < PF + 2a,$$
$$PF < PF' + 2a,$$
$$2a < PF' + PF.$$

On peut évidemment supposer $PF' \geqq PF$; dans ce cas, la seconde inégalité est vérifiée ; la première exprime que le point P doit être extérieur à l'hyperbole. Si P n'est pas sur l'axe focal, le triangle PFF' donne

$$PF' + PF > FF' ;$$

donc, *a fortiori*,

$$PF' + PF > 2a.$$

Si P est sur l'axe focal, étant à l'extérieur de l'hyperbole, il sera entre A et A' et, par conséquent, comme $PF + PF' > PA + PA'$, la troisième inégalité sera vérifiée.

La seule condition, nécessaire et suffisante, pour qu'on puisse mener par le point P deux tangentes à une hyperbole, est que le point P soit extérieur.

Remarquons enfin que, le point F étant extérieur au cercle directeur (F′), si les cercles considérés sont tangents, ils seront tangents extérieurement, et dans ce cas

$$PF' = PF + 2a,$$

ou $PF' - PF = 2a$; le point P est alors sur l'hyperbole.

Donc, en résumé : par un point intérieur, on ne peut mener aucune tangente à l'hyperbole ; par un point donné sur la courbe, on en peut mener une seule, dont le point de contact est le point donné et enfin, par un point extérieur, on en peut mener deux ; mais l'une d'elles peut être une asymptote, et les deux se réduisent aux asymptotes quand le point donné est le centre.

236. Problème. — *Mener à une hyperbole dont on connaît les foyers et l'axe focal, une tangente parallèle à une droite donnée.*

Soient (fig. 175) FD et FD′ les tangentes menées de F au cercle directeur (F′) ; le symétrique de F par rapport à une tangente étant sur le cercle (F′), il est nécessaire que la perpendiculaire menée par F à la direction donnée tombe à l'intérieur de l'angle DFD′ et, par conséquent, que la direction donnée R′F′R soit à l'intérieur de l'angle DF′D″; ce qui revient à dire que, si l'on mène la parallèle à la direction donnée par le centre de l'hyperbole, cette droite

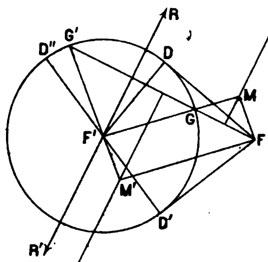


Fig. 175.

doit se trouver dans les angles des asymptotes qui ne comprennent pas la courbe ; il y a alors deux solutions. Si la direction donnée est celle d'une asymptote, les deux solutions se confondent en une seule, et l'on obtient l'asymptote elle-même.

Les points de contact de deux tangentes parallèles sont diamétralement opposés.

Remarque. — Quand on cherche l'intersection d'une droite et d'une hyperbole, si l'on ne peut mener à la courbe aucune tangente parallèle à cette droite, celle-ci coupe l'hyperbole en deux points situés un sur chaque branche. Si, au contraire, on peut mener deux tangentes parallèles à la droite donnée, celle-ci ne coupe l'hyperbole que si elle n'est pas entre les deux tangentes, et dans ce cas elle ne rencontre qu'une seule branche; c'est facile à vérifier.

237. **Théorème de Poncelet.** — *Les tangentes à une hyperbole, issues d'un point extérieur, font des angles égaux avec les rayons vecteurs de ce point.*

Corollaires. — I. — *Les tangentes issues d'un point sont vues d'un foyer sous des angles égaux ou supplémentaires.*

II. — *Le lieu des points d'où l'on voit une hyperbole sous un angle droit, est un cercle concentrique à l'hyperbole, dont le rayon a pour valeur* $\sqrt{a^2 - b^2}$; ce cercle, qu'on appelle le cercle *orthoptique*, se réduit au centre quand l'hyperbole est équilatère ; il n'existe que si $a > b$, c'est-à-dire si l'angle aigu d'une asymptote avec l'axe focal est inférieur à 45°.

Les démonstrations sont analogues à celles des mêmes théorèmes dans l'ellipse.

On appelle *hyperboles conjuguées* deux hyperboles ayant les mêmes axes de symétrie, mais telles que, si $2a$ et $2b$ sont les longueurs des axes, $2a$ soit l'axe focal de l'une et $2b$ l'axe focal de l'autre. Les distances focales sont égales, mais les deux axes focaux font un angle droit. Le cercle orthoptique de la première ayant pour rayon $\sqrt{a^2 - b^2}$, celui de la seconde a pour rayon $\sqrt{b^2 - a^2}$; un seul de ces deux cercles existe donc.

Remarquons enfin que les deux hyperboles ont les mêmes asymptotes.

III. — *La portion d'une tangente mobile comprise entre deux tangentes fixes est vue d'un foyer sous un angle constant.*

238. **Théorème.** — *Le produit des distances des deux foyers à une tangente quelconque d'une hyperbole, est constant et égal à* $-b^2$.

Même démonstration que pour l'ellipse. On obtient $-b^2$, parce que les segments des perpendiculaires comptés à partir des foyers ont des sens contraires.

239. **Théorème.** — *La projection de la normale sur les rayons vecteurs est constante.*

Même démonstration que pour l'ellipse.

240. Équation de l'hyperbole. — En posant (fig. 176) $\overline{OP} = x$, $\overline{PM} = y$, on a

$$F'M - FM = 2a,$$

$$\overline{F'M}^2 - \overline{FM}^2 = 4cx;$$

d'où

$$F'M + FM = \frac{2c}{a}x.$$

Donc

$$F'M = a + \frac{cx}{a},$$

$$FM = -a + \frac{cx}{a}.$$

En continuant comme pour l'ellipse, on obtient l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 ;$$

d'où l'on tire

$$\overline{PM}^2 = \frac{b^2}{a^2} A'P.AP.$$

241. Si deux ellipses, deux hyperboles, ou encore une ellipse et une hyperbole, ont les mêmes foyers, on dit qu'elles sont *homofocales*.

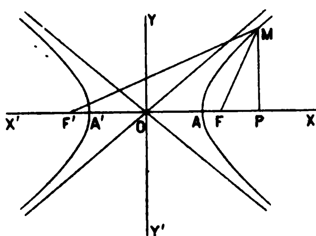


Fig. 176.

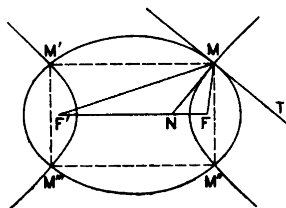


Fig. 177.

Par chaque point du plan, passent une ellipse et une hyperbole ayant pour foyers deux points donnés. Ces courbes ont quatre points communs, et se coupent à angle droit en chacun d'eux.

En effet, soient (fig. 177) F et F′ les foyers donnés, et M un point quelconque du plan ; on peut construire l'ellipse qui a pour foyers F et F′ et pour grand axe la somme MF + MF′; cette ellipse passe par M et par les points M′, M″, M‴ symétriques de M par rapport à FF′, par rapport à la perpendiculaire au milieu de FF′ et par rapport au milieu de FF′. De même, on peut construire l'hyperbole ayant pour foyers F, F′ et dont l'axe focal a pour longueur la différence $|MF' - MF|$; cette

hyperbole passe aussi par les points M, M′, M″, M‴. Les tangentes à ces deux courbes en M sont les bissectrices des angles formés par les rayons vecteurs MF, MF′; donc ces courbes se coupent à angle droit en M et aussi aux trois autres points communs.

EXERCICES

1. Construire une hyperbole, connaissant :

1° L'excentricité, un sommet et une asymptote. — On détermine la longueur b du demi-axe imaginaire;

2° Les deux foyers et la direction d'une asymptote;

3° Un foyer, une asymptote et une tangente ;

4° La longueur de l'axe focal (ou la distance focale), un foyer et une asymptote ;

5° La longueur de l'axe focal (ou la distance focale) et les deux asymptotes.

2. Construire une ellipse ou une hyperbole, connaissant :

1° Le centre, une tangente avec le point de contact, et la longueur de l'axe focal;

2° Le centre, deux tangentes et la longueur de l'axe focal;

3° Les extrémités de l'axe focal et un point ou une tangente ;

3. Lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés.

4. Pour trouver la tangente en un point M (fig. 178) à une ellipse ou à une hyperbole, ou plus généralement à une courbe telle que

$$a\text{MF} + b\text{MF}' = \text{const.}$$

a et b étant des coefficients donnés, on considère deux points infiniment voisins de la courbe, M et M′; on prend FN = FM′ et F′P = F′M′; on a

$$a.\text{MN} - b.\text{MP} = 0.$$

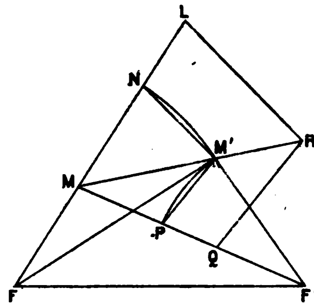


Fig. 178.

ML étant une longueur fixe, on mène LR parallèle à NM′ et, par le point R de rencontre avec MM′, RQ parallèle à M′P ; on a

$$\frac{\text{ML}}{\text{MQ}} = \frac{\text{MN}}{\text{MP}} = \frac{b}{a};$$

en outre, les angles en L et Q tendent vers 90°. En déduire la direction limite de MR.

5. Soient F et F′ les foyers ; O le centre d'une ellipse ou d'une hyperbole ; T et N, les points de rencontre de la tangente et de la normale en M avec l'axe focal ; T′ et N′, les points de rencontre de cette tangente et de cette normale avec l'axe non focal. Prouver que les cinq points M,F,F′,N′,T′ sont sur un même cercle et que

$$\overline{ON} \times \overline{OT} = \overline{N'O} \times \overline{OT'} = \overline{OF}^2 = c^2.$$

6. Lieu des points de contact des tangentes menées, par un point donné sur un axe, aux ellipses et aux hyperboles homofocales. — Un cercle [ex. 5].

7. Lieu des sommets des angles droits dont les côtés sont respectivement tangents à deux ellipses, ou à deux hyperboles homofocales. — On démontre que la somme des carrés des distances du sommet de l'angle aux deux foyers est constante, en considérant les symétriques de l'un des foyers par rapport aux côtés de l'angle.

CHAPITRE III

PARABOLE

242. *On appelle* PARABOLE *une courbe plane dont chaque point est à égale distance d'un point fixe appelé* FOYER *et d'une droite fixe appelée* DIRECTRICE.

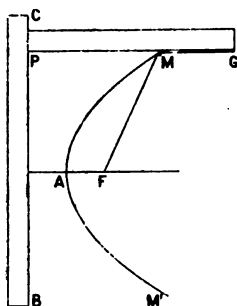


Fig. 179.

243. *Construction d'une parabole : 1° d'un trait continu.* — Le long de la directrice donnée appliquons (fig. 179) une règle BC ; prenons un fil dont la longueur soit égale à celle d'une seconde règle, que nous ferons glisser à angle droit sur la première (au lieu d'une seconde règle

on peut prendre une équerre). L'une des extrémités du fil est fixée au foyer F, l'autre est fixée à l'extrémité G de la règle mobile; la pointe M d'un crayon tend le fil. On a, d'après cela, MF = MP; par suite, le point M décrit un arc de parabole AM. On pourra de même tracer l'arc AM′ symétrique du premier par rapport à la droite AF, perpendiculaire à la directrice.

Le point M pouvant s'éloigner du point F à une distance égale à la longueur de la règle PG, on voit que la parabole se compose de deux arcs illimités partant du point A.

2° *Construction par points.* — Prenons (fig. 180), sur la perpendiculaire FB à la directrice BC, un point arbitraire P, par lequel nous mènerons la parallèle à la directrice; du point F comme centre, avec BP pour rayon, traçons un cercle qui coupe cette parallèle en M et M′. Ces deux points, symétriques par rapport à BP, appartiennent à la parabole ayant le point F pour foyer et BC pour directrice. Pour que ces points existent, il faut supposer

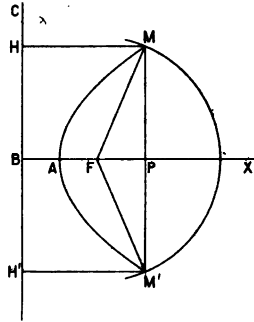


Fig. 180.

$$FP < BP.$$

On en conclut que le point auxiliaire P doit se trouver sur la demi-droite AX. Quand P est en A, les deux points M et M′ se confondent avec ce point A.

En joignant les points obtenus par un trait continu, on obtient deux arcs AM, AM′ symétriques par rapport à AX. Le point P pouvant s'éloigner indéfiniment de B, le rayon FM peut grandir indéfiniment.

On voit encore ainsi que la parabole se compose de deux arcs illimités issus du point A et symétriques par rapport à la perpendiculaire à la directrice issue du foyer et qu'on nomme l'*axe* de la parabole. Le point A se nomme le *sommet*. La distance du foyer à la directrice est le *paramètre*. On pose

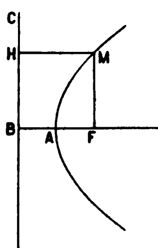


Fig. 181.

$$BF = p, \quad \text{d'où} \quad BA = AF = \frac{p}{2}.$$

Le rayon vecteur FM (fig. 181) perpendiculaire à l'axe a pour longueur p, puisqu'il est égal à BF.

244. Problème. — *Trouver les points d'intersection d'une droite et d'une parabole dont on connaît le foyer et la directrice.*

Soit (fig. 182) M un point commun à la droite X'X et à la parabole ayant pour directrice la droite DD'. Le cercle ayant pour centre M et passant par le foyer F est tangent en G à la directrice. Ce cercle passe par le point φ symétrique de F par rapport à X'X. Réciproquement, le centre M de tout cercle passant par F et φ et tangent à la directrice est un point commun à X'X et à la parabole considérée; car, si l'on appelle G le point de contact de ce cercle avec la directrice, on a bien MG = MF, et MG est perpendiculaire à la directrice.

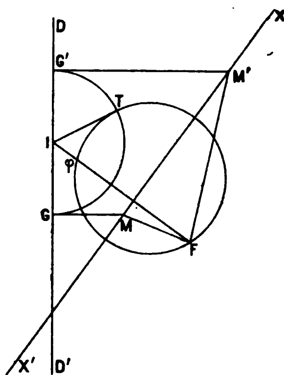


Fig. 182.

La droite Fφ coupe la directrice en I; si l'on suppose

F et φ du même côté par rapport à la directrice, il suffit de prendre de part et d'autre de I :

$$GI = IG' = \sqrt{IF \times I\varphi}$$

et de mener GM et G'M' parallèles à l'axe et rencontrant X'X en M et M', qui sont les points cherchés.

Si Fφ devient parallèle à la directrice, I s'éloigne indéfiniment, le point G, par exemple, tend vers le milieu de la projection de Fφ sur la directrice et G' s'éloigne indéfiniment. Le point M tend vers une position limite, à distance finie, et M' s'éloigne indéfiniment dans la direction de l'axe.

En résumé, si X'X n'est pas parallèle à l'axe, elle coupe la parabole en deux points distincts, si φ est du même côté que F par rapport à la directrice ; les deux points se confondent en un seul, si le point φ est sur la directrice. Toute parallèle à l'axe rencontre la parabole en un seul point à distance finie. Enfin, si le point φ et le foyer F sont de part et d'autre de la directrice, la droite X'X ne rencontre pas la parabole.

Une droite quelconque d'un plan peut donc rencontrer une parabole tracée dans ce plan en deux points au plus. La parabole est une courbe *convexe*.

245. *Condition pour qu'un point soit intérieur ou extérieur à une parabole.*

Une parabole partage le plan dans lequel elle est tracée en deux régions ; celle qui comprend le foyer se nomme la région *intérieure*, l'autre la région *extérieure*.

Soit (fig. 183) M un point appartenant à la région intérieure d'une parabole de foyer F et de directrice DD' ;

la parallèle à l'axe menée par ce point rencontre la parabole en N et la directrice en P.

On a :

$$MF < MN + NF,$$
$$NF = NP ;$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$MF < MP.$$

En second lieu, soit (fig. 184) M′ un point appartenant

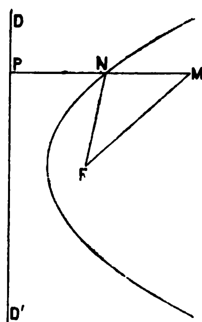


Fig. 183.

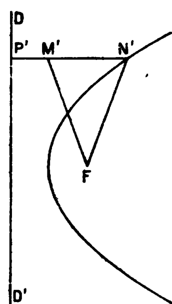


Fig. 184.

à la région extérieure; la parallèle à l'axe menée par M′ rencontre la parabole en N′ et la directrice en P′. On a :

$$M'F > N'F - M'N',$$
$$N'F = P'N';$$

d'où, en ajoutant,

$$M'F > P'M'.$$

On a supposé M′ du même côté que le foyer par rapport à la directrice; si ce point était sur la directrice ou de l'autre côté, il serait évidemment plus près de la directrice que du foyer.

D'après cela, un point est intérieur à la parabole, sur la parabole, ou extérieur suivant que sa distance au foyer est inférieure, égale ou supérieure à sa distance à la directrice.

La parabole est donc le lieu des points également distants de son foyer et de sa directrice.

246. *Tangente à la parabole.* — Soient (fig. 185) M, M′ deux points de la parabole ayant pour foyer F et pour directrice DD′. Ces points sont les centres des cercles tangents à la directrice et menés par le foyer F et le point φ symétrique de F par rapport à MM′. Soit TT′ la perpendiculaire à la droite FG allant du foyer au point de contact de la directrice et du cercle de centre M. Si M′ tend vers M, en restant sur la parabole, le segment MM′ tendant vers zéro, il en est de même *a fortiori* de sa projection GG′ sur la directrice; le point de rencontre I de Fφ et de la directrice est le milieu de GG′; par suite, GI tend vers zéro. L'angle GFI tend donc vers zéro et il en est de même de l'angle TMM′ qui lui est égal. En d'autres termes, la droite TT′ est la limite de la sécante MM′ quand la corde MM′ tend vers zéro. La droite TT′, qui est la bissectrice de l'angle FMG, est donc *tangente* en M à la parabole.

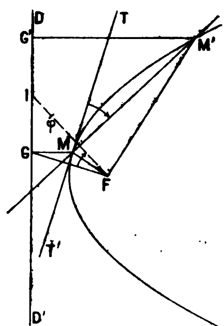


Fig. 185.

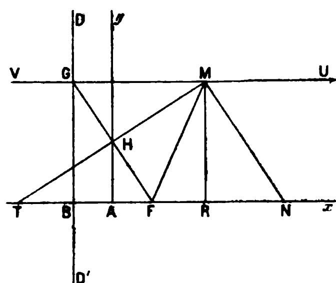


Fig. 186.

Ainsi la parabole admet une tangente en chacun de ses points et cette tangente fait des angles égaux avec l'axe et avec le rayon vecteur du point de contact. D'une manière plus précise, la tangente en un point M (fig. 186) rencontre l'axe en un point T tel que $TF = FM$.

247. Le minimum de TF est égal à $\frac{p}{2}$; il correspond au cas où M vient en A, et où la tangente est perpendiculaire à l'axe. Le point A se nomme le *sommet.*

Si, par le point M, on mène la demi-droite MU parallèle à la demi-droite AF et de même sens et la demi-droite opposée MV, la tangente en M est la bissectrice de l'angle VMF, et la *normale* MN est la bissectrice de l'angle UMF.

248. **Théorème.** — 1° *Le lieu des symétriques du foyer par rapport aux tangentes à une parabole est la directrice;*

2° *Le lieu des projections du foyer sur les tangentes est la tangente au sommet.*

En effet, si G (fig. 186) est la projection de M sur la directrice, le triangle FMG est isocèle, la tangente est la médiane MH. Or G est sur la directrice et H sur la parallèle menée par A à la directrice, c'est-à-dire sur la tangente au sommet.

Réciproquement, si G est un point quelconque de la directrice, la parallèle à l'axe menée par G rencontre la parabole en M, on a $MF = MG$, et si H est le point de rencontre de FG avec la tangente au sommet, H est le milieu de FG, la médiane MH est en même temps hauteur et bissectrice, donc MH est la tangente en M, H la projection du foyer sur la tangente, et G le symé-

trique du foyer par rapport à cette tangente. La proposition est donc entièrement établie.

249. *Construction d'une parabole par tangentes.* — Si un angle droit (fig. 187 et 188) se déplace de façon qu'un

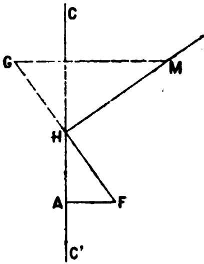


Fig. 187.

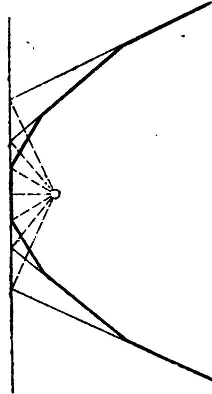


Fig. 188.

côté passe par un point fixe F et que le sommet décrive une droite fixe CC′, l'autre côté restera constamment tangent à la parabole ayant pour foyer F et pour sommet la projection A de F sur CC′ ; on aura le point de contact M sur la tangente HM, en prolongeant FH d'une longueur égale HG et en menant par G la perpendiculaire à CC′, c'est-à-dire la parallèle à AF.

250. **Théorème.** — *Dans une parabole, la sous-normale est constante et égale au paramètre.*

Soit (fig. 186) R la projection du point M de la parabole sur l'axe ; le segment RN s'appelle la *sous-normale* de M ; TR est la *sous-tangente*. La figure GMNF est un parallélogramme ; donc FN = GM = BR, et par suite,

$$RN = BF = p.$$

La sous-normale est égale à la projection de la normale sur MU, et comme MN est la bissectrice de l'angle FMU, elle est aussi égale à la projection de la normale sur MF; donc, comme pour l'ellipse et l'hyperbole, *la projection de la normale sur le rayon vecteur est constante et égale au paramètre.*

On peut encore remarquer que FN = GM = MF = TF; le foyer est donc le milieu du segment TN. En outre, la figure GMFT est un parallélogramme, puisque les côtés opposés GM et TF sont égaux et parallèles. Il en résulte que H est le milieu de MT. Ainsi, *le lieu du milieu de la tangente* MT *est la tangente au sommet.*

Le sommet A est le milieu de la sous-tangente.

251. Équation de la parabole. — Le triangle TMN (fig. 186) donne :

$$\overline{RM}^2 = TR.RN = 2AR.RN,$$

ou

$$\overline{RM}^2 = 2p.AR.$$

Si l'on pose

$$\overline{RM} = y, \quad \overline{AR} = x,$$

on a donc

$$y^2 = 2px.$$

252. Problème. — *Mener par un point une tangente à une parabole.*

1° *Le point* M (fig. 189) *est donné sur la parabole.* On peut abaisser de M la perpendiculaire sur FG, G étant la projection de M sur la directrice. On peut aussi déterminer sur l'axe les segments TF et FN égaux à FM. Alors MT sera la tangente et MN la normale en M. Cette

dernière construction n'est pas convenable si M est trop près du sommet.

2° *Le point donné n'est pas sur la parabole.*

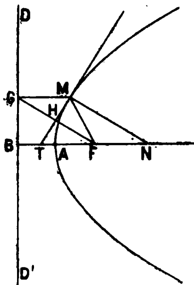


Fig. 189.

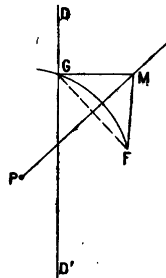


Fig. 190.

Soit (fig. 190) PM une tangente issue de P ; le symétrique G de F par rapport à PM est sur la directrice, donc PF = PG. Le point G est donc à l'intersection de la directrice et du cercle décrit de P comme centre avec PF pour rayon. Réciproquement, à tout point G commun à la directrice et à ce cercle correspond une tangente, qui est la perpendiculaire à FG menée par P.

Pour que le problème soit possible, il faut que la distance de P à la directrice soit moindre que PF ; ce qui exige que le point P soit extérieur à la parabole. D'après ce que nous venons de dire, la condition est évidemment suffisante.

Donc, par un point extérieur, on peut mener deux tangentes à une parabole ; par un point pris sur la courbe, on n'en peut mener qu'une seule, dont le point de contact se confond avec le point donné. Enfin, par un point intérieur, on n'en peut mener aucune.

253. PROBLÈME. — *Mener à une parabole une tangente parallèle à une droite donnée* X'X (fig. 191).

Le symétrique du foyer par rapport à la tangente cherchée étant sur la directrice, on l'obtient en prenant l'intersection G de cette directrice avec la perpendiculaire abaissée du foyer sur la direction donnée. Le point G existe toujours, pourvu que la droite donnée X'X ne soit pas parallèle à l'axe. La tangente cherchée est la perpendiculaire au milieu de FG ; le point de contact s'obtient en menant GM parallèle à l'axe.

On peut donc mener à une parabole une seule tangente parallèle à une direction donnée, non parallèle à l'axe.

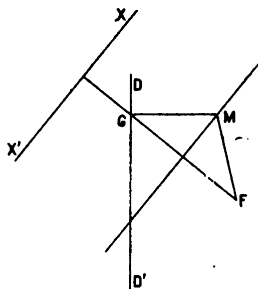


Fig. 191.

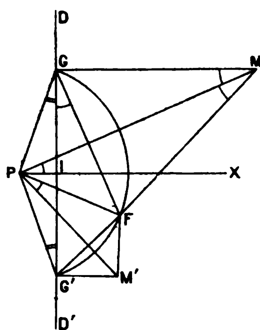


Fig. 192.

254. ***Théorème de Poncelet.*** — *Les tangentes à une parabole, issues d'un point extérieur, font des angles égaux avec la droite qui joint ce point au foyer et avec l'axe.*

Soient (fig. 192) PM, PM' les tangentes issues de P. Menons PX parallèle à l'axe. Les angles MPX et FGG' sont égaux comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires et les angles FPM' et FGG' sont égaux comme ayant même mesure. Donc $\widehat{MPX} = \widehat{FPM'}$.

Corollaires. — I. — Les angles PFM et PGM sont égaux, ainsi que PFM′ et PG′M′; mais, le triangle PGG′ étant isocèle, on en conclut que les angles PGM et PG′M′ sont égaux. Donc les angles PFM et PFM′ le sont aussi. Ainsi :

Les tangentes issues d'un point sont vues du foyer sous des angles égaux.

II. — Si l'angle MPM′ est droit, il en est de même de l'angle GFG′, et alors le point P est sur la directrice, et réciproquement. Donc :

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une parabole est la directrice.

III. — *Les portions d'une tangente mobile comprises entre deux tangentes fixes, sont vues du foyer sous un angle constant.*

IV. — Le point I est le milieu de GG′; donc *la parallèle à l'axe menée par* P *passe par le milieu de la corde* MM′ *qui joint les points de contact.*

V. — Les angles PMF et MPX étant égaux, il en est de même des angles PMF et FPM′; les deux triangles PFM et M′FP sont donc équiangles; on en conclut :

$$\overline{PF}^2 = FM.FM'.$$

PARABOLE CONSIDÉRÉE COMME LIMITE D'UNE ELLIPSE OU D'UNE HYPERBOLE

255. Considérons, par exemple (fig. 193), une ellipse ayant pour foyers F et F′ et pour sommets de l'axe focal A et A′. Si l'on prend BA = AF on a F′B = $2a$; donc tous les cercles directeurs de centre F′ passeront par B, si l'on

suppose A et F fixes et F′ variable. Or, si a augmente indéfiniment, un arc SBS′ du cercle directeur de centre F′ tend à se confondre avec une portion de la tangente DD′ en B. Si l'on considère l'ellipse comme le lieu des points équidistants de F et du cercle directeur (F′), les points de cette ellipse situés à des distances de F moindres qu'une longueur donnée d'avance auront pour limites des points également distants de F et de la droite DD′, c'est-à-dire des points d'un arc de parabole ayant F pour foyer et DD′ pour directrice.

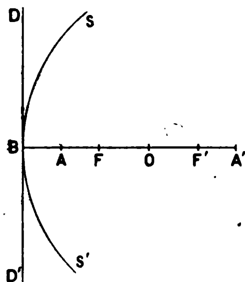


Fig. 193.

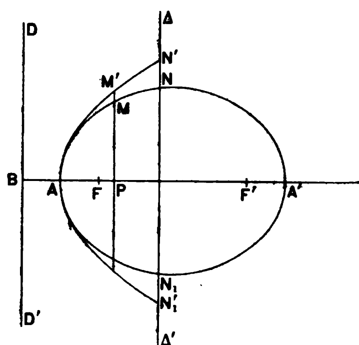


Fig. 194.

Pour donner une démonstration rigoureuse, soit (fig. 194) M un point de l'ellipse ayant pour foyers F, F′.

Posons

$$AF = a - c = \frac{1}{2}p.$$

On a

$$\overline{PM}^2 = \frac{b^2}{a^2} AP.PA' = \frac{b^2}{a^2} AP\,(AA' - AP)$$

ou

$$\overline{PM}^2 = \frac{2b^2}{a} AP - \frac{b^2}{a^2} \overline{AP}^2.$$

Or

$$\frac{b^2}{a} = \frac{(a-c)(a+c)}{a} = p - \frac{p^2}{4a},$$

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{a} - \frac{p^2}{4a^2};$$

par suite,

$$\lim. \frac{b^2}{a} = p, \qquad \lim. \frac{b^2}{a^2} = 0.$$

Donc, en supposant que AP reste inférieur à une longueur donnée d'avance,

$$\lim \overline{PM}^2 = 2p.AP = \overline{PM'}^2,$$

M' étant un point de la parabole ayant pour foyer F et pour directrice DD'.

On voit ainsi que les points de l'arc d'ellipse NAN_1 compris entre la tangente en A et une parallèle $\Delta\Delta'$ à cette tangente tendent vers les points de l'arc $N'AN'_1$ de la parabole ayant pour foyer F et pour directrice DD'. D'ailleurs, on peut supposer $\Delta\Delta'$ aussi loin qu'on veut de la tangente en A.

Même démonstration en partant d'un arc d'hyperbole.

De là résulte que les propriétés de la parabole peuvent se déduire de celles de l'ellipse ou de l'hyperbole ; il suffit de regarder la parabole comme ayant deux foyers dont l'un est à l'infini sur l'axe. Ainsi la tangente en un point doit faire des angles égaux avec les rayons vecteurs de ce point, c'est-à-dire avec le rayon vecteur et la parallèle à l'axe menée par ce point, etc., etc.

EXERCICES

1. Construire une parabole, connaissant :
1° Le foyer ou la directrice et deux points ;
2° Le foyer ou la directrice et deux tangentes ;
3° Le foyer ou la directrice, une tangente et le point de contact.

2. Dans une parabole, le cercle circonscrit au triangle formé par trois tangentes, passe par le foyer. — La tangente au sommet est la droite de Simson relative au foyer.

3. Construire une parabole dont on donne quatre tangentes.

4. La droite qui joint au foyer d'une parabole le milieu de la projection d'une corde sur la directrice est perpendiculaire à cette corde.

5. Mener, par le foyer d'une parabole, une corde de longueur donnée.

6. On mène d'un point A deux tangentes AB, AC à une parabole ; une troisième tangente coupe AB en D et AC en E, prouver que $\frac{AD}{DB} = \frac{EC}{AE}$. — En menant par A, D, E et par le point de contact de la troisième tangente les parallèles à l'axe rencontrant la corde BC en A', D', E' et L, D' est le milieu de BL, E' le milieu de LC et A' le milieu de BC.

Le quatrième sommet du parallélogramme construit sur AD et AE est sur la corde BC.

7. Construire une parabole connaissant le foyer et le point où la tangente est inclinée à 45° sur l'axe.

8. Même problème, en remplaçant le foyer par le sommet.

9. Lieu des foyers et des sommets des paraboles ayant même directrice et une tangente commune.

10. Mener, par un point de l'axe d'une parabole, deux normales faisant entre elles un angle donné.

11. Quand une parabole roule (sans glisser) sur une parabole égale, les sommets étant supposés d'abord confondus, le foyer de la parabole mobile décrit la directrice de l'autre.

12. Montrer que l'angle sous lequel se coupent deux paraboles ayant un foyer commun est la moitié de l'angle de leurs axes. En conclure que deux paraboles *homofocales* se coupent à angle droit. On dit que deux paraboles sont *homofocales* quand elles ont même foyer et même axe.

13. Construire la tangente commune et les points communs à deux paraboles homofocales.

14. On mène par le foyer d'une parabole la perpendiculaire à l'axe sur laquelle on prend deux points fixes A et B équidistants du foyer ; on projette ces deux points sur une tangente quelconque en A' et B'. Prouver que l'aire du trapèze ABB'A' reste constante quand la tangente varie.

15. En remarquant que les cercles tangents à la directrice d'une parabole et ayant leurs centres sur une droite D sont homothétiques, trouver les points d'intersection de cette parabole et de la droite D.

CHAPITRE IV

PROPRIÉTÉS COMMUNES AUX TROIS COURBES

256. ***Théorème***. — *Si l'on mène la tangente en chaque point* M *d'une ellipse ou d'une hyperbole* (fig. 195) *et qu'on élève en l'un des foyers* F *la perpendiculaire* FN *au rayon vecteur* MF, *le lieu du point de rencontre* N *de cette perpendiculaire avec la tangente est une perpendiculaire à l'axe focal.*

Soit G le symétrique du foyer F par rapport à la tangente MN ; l'angle MGN est droit ; donc

$$\overline{NF'}^2 - \overline{NG}^2 = \overline{F'G}^2,$$

ou

$$\overline{NF'}^2 - \overline{NF}^2 = 4a^2.$$

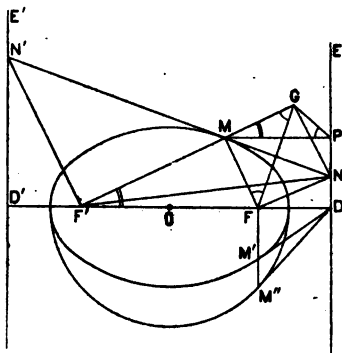


Fig. 195.

Le point N décrit donc une perpendiculaire DE à l'axe focal.

D'ailleurs, O étant le milieu de FF', on a

$$\overline{NF'}^2 - \overline{NF}^2 = 2.OD.F'F = 4c.OD;$$

donc

$$OD = \frac{a^2}{c}.$$

On peut encore remarquer que, si l'on considère le rayon vecteur FM' perpendiculaire à l'axe focal, la tangente en M' passe par D. Dans le cas de l'ellipse, on pourra mener la tangente au point M'' du cercle principal.

En partant de l'autre foyer F', on obtiendra une seconde droite D'E', lieu de N', et symétrique de la première par

rapport au centre. Ces deux droites se nomment les *directrices*; DE est la *directrice correspondant au foyer* F, D'E' la *directrice correspondant au foyer* F'.

257. ***Théorème.*** — *Le rapport des distances d'un point quelconque d'une ellipse, ou d'une hyperbole, au foyer et à la directrice correspondante, est constant et égal à* $\frac{c}{a}$.

En effet, soit P (fig. 195) la projection d'un point M de l'ellipse sur la directrice relative au foyer F ; le point P appartient au cercle de diamètre MN. Or les angles MGF et GPM sont égaux comme ayant même mesure et les angles GMP et GF'F sont égaux comme correspondants ; les deux triangles GFF' et PGM sont donc semblables et, par suite :

$$\frac{MG}{MP} = \frac{FF'}{F'G},$$

c'est-à-dire

$$\frac{MF}{MP} = \frac{c}{a}. \qquad \text{c. q. f. d.}$$

258. ***Théorème.*** — *Le lieu des points dont le rapport des distances à un point et à une droite fixes est constant et égal à* $\frac{c}{a}$ *est*

une ellipse, si $\frac{c}{a} < 1$,

une hyperbole, si $\frac{c}{a} > 1$,

une parabole, si $\frac{c}{a} = 1$.

Le dernier cas nous est déjà connu ; il suffit de s'occuper des deux premiers. Supposons $\frac{c}{a} < 1$; soient (fig. 196) F et DE le point et la droite donnés ; proposons-nous de trouver les points du lieu qui se trouvent sur une perpendiculaire PP' à la droite DE. Soit M un de ces points ; on a

$$\frac{MF}{MP} = \frac{c}{a},$$

P étant le pied de la perpendiculaire considérée. Partageons FP dans le rapport $\frac{c}{a}$ et soient Q, Q′ les points de division; comme on suppose $\frac{c}{a} < 1$, le point Q est plus près de F que de P et Q′ est sur le prolongement de PF. Les points cherchés sont à l'intersection de PP′ et de la circonférence décrite sur QQ′ comme diamètre. Si PP′ se déplace parallèlement à elle-même, les points Q, Q′ et, par suite, le milieu R de QQ′ décrivent des droites AQ, A′Q′, OR parallèles à DE. La droite OR passe par le milieu S de MM′ et l'on a :

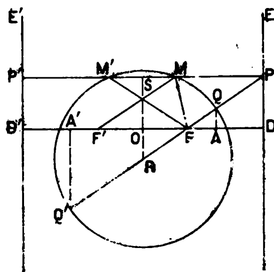


Fig. 196.

$$\frac{MF}{MP} = \frac{M'F}{M'P} = \frac{c}{a};$$

d'où l'on tire :

$$\frac{MF + M'F}{MP + M'P} = \frac{c}{a},$$

c'est-à-dire

$$\frac{MF + M'F}{2SP} = \frac{c}{a};$$

d'où

$$MF + M'F = 2\,\frac{c}{a}\cdot OD.$$

Mais si l'on prend F′O = OF, on a M′F = MF′ ; donc

$$MF + MF' = 2\,\frac{c}{a}\cdot OD.$$

La somme MF + MF′ est donc constante. Or les points A et A′ sont des points du lieu ; donc

$$\frac{c}{a}\cdot OD = OA.$$

D'autre part, A et A′ divisent harmoniquement FD ; par suite :

$$\overline{OA}^2 = OF.OD.$$

Or on peut supposer $OF = c$; on aura donc

$$c.OD = OA.a = \overline{OA}^2,$$

ce qui donne $OA = a$.

En résumé, si le lieu existe, il ne peut être que l'ellipse ayant pour foyers F, F′ et pour grand axe AA′. Mais la droite DE est précisément la directrice correspondant au foyer F de cette ellipse, puisque $OD = \frac{a^2}{c}$; le rapport des distances d'un point quelconque de cette ellipse au foyer F et à la directrice correspondante est précisément égal à $\frac{c}{a}$. Cette ellipse est donc le lieu cherché.

Si le rapport $\frac{c}{a}$ avait été donné plus grand que 1, on aurait trouvé une hyperbole. La méthode est la même, la seule différence consiste en ce que le point P serait alors placé entre M et M′ et, par suite,

$$|PM - PM'| = 2\ PS\ ;$$

d'où

$$|MF - MF'| = \text{const}.$$

MÉTHODE DE DANDELIN

259. ***Théorème.*** — *La section d'un cône de révolution par un plan ne passant pas par le sommet est une ellipse, une parabole ou une hyperbole.*

Trois cas peuvent se présenter.

PREMIER CAS. — Le plan sécant P rencontre une seule nappe du cône (fig. 197). Par l'axe SX de ce cône, on peut

mener un plan perpendiculaire au plan sécant; nous prendrons ce plan pour plan de la figure; il coupe le cône suivant deux génératrices SA, SA'. Soit AA' la trace du plan sécant sur le plan de la figure. Inscrivons un cercle au triangle SAA' et soient D, D', F ses points de contact avec les côtés SA, SA' et AA' respectivement. Traçons également le cercle exinscrit situé dans l'angle ASA' et tangent en E, E', F' aux trois côtés du triangle.

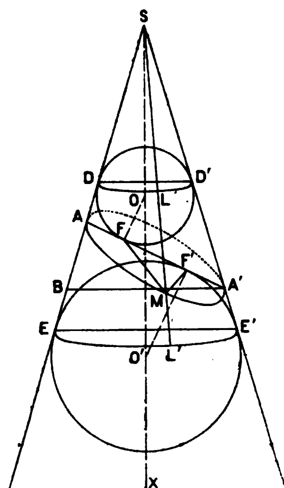


Fig. 197.

Les sphères dont ces deux cercles sont des grands cercles sont inscrites au cône. La sphère de centre O, que nous représenterons par (O), touche le cône suivant le petit cercle ayant pour diamètre DD' et dont le plan est perpendiculaire au plan de la figure, et, pareillement, la sphère (O') touche le cône suivant le petit cercle ayant pour diamètre EE' et dont le plan est aussi perpendiculaire à celui de la figure. La section du cône par le plan P est évidemment une courbe fermée AMA'; soit M un point quelconque de la courbe obtenue. Le plan P est tangent à la sphère (O) en F car, les plans P et SAA' étant perpendiculaires, la droite OF, menée dans le second et perpendiculaire à l'intersection AA' de ces deux plans, est perpendiculaire au premier ; donc MF est tangent à la sphère (O) en F ; pour la même raison, MF' est tangent en F' à la sphère (O'). La génératrice SM touche la sphère (O), inscrite au cône, au point L où elle rencontre

le cercle DLD′ et la sphère (O′) au point L′ où elle rencontre le cercle EL′E′. On a donc MF = ML, comme tangentes à une même sphère issues d'un même point, et, de même, MF′ = ML′. Remarquons maintenant que la courbe d'intersection est tout entière entre les plans DLD′, EL′E′, de telle sorte que le point M est compris entre L et L′. On a donc

$$MF + MF' = ML + L'M = LL'.$$

Mais LL′ = DE, comme portions de deux génératrices comprises entre deux plans perpendiculaires à l'axe; en outre [G.P.85], on sait que DE = AA′; donc

$$MF + MF' = AA'.$$

La courbe d'intersection est donc une ellipse ayant pour foyers F, F′ et dont le grand axe est le segment AA′.

Remarque. — Si l'on mène A′B perpendiculaire à l'axe SX, on a

$$AB = DE - DA - BE = AA' - AF - F'A' = FF'.$$

Ainsi, dans le triangle ABA′, le côté AA′ = $2a$, le côté AB = $2c$ et l'angle ABA′ est le complément du demi-angle d'ouverture du cône.

Réciproquement. — *On peut toujours placer une ellipse donnée sur un cône de révolution donné.*

On peut préciser davantage et demander que le plan de l'ellipse soit perpendiculaire à un plan donné passant par l'axe du cône, et alors tout revient à construire le triangle SAA′, AA′ étant le grand axe de l'ellipse. Il suffit de construire le triangle ABA′; on prend (fig. 198) $ba = 2c$, on mène by faisant avec ba un angle égal à $90^\circ - \frac{1}{2}\hat{S}$, $\hat{S}$ étant l'ouverture du cône. De a comme centre, avec $2a$ pour rayon, on trace un cercle qui coupe la demi-droite by en un seul point a', puisque

$2a > 2c$; enfin, au milieu de ba', on élève la perpendiculaire sx, qui rencontre ba en s; il suffit alors de placer le triangle asa' de façon que les côtés sa, sa' s'appliquent sur les côtés de l'angle ASA'; si a tombe en A et a' en A', le plan mené par AA' et perpendiculaire à SAA' coupera le cône suivant une ellipse égale à la proposée, car elle aura pour grand axe AA' et ses foyers F, F' seront sur AA' et placés de façon que AF = F'A' et FF' = AB. En faisant tourner cette figure autour de SX, on aurait d'ailleurs tous les plans sécants répondant à la question. En particulier, on peut porter sa sur SA' et sa' sur SA. On voit ainsi que, si le plan SAA' est donné, il y a deux plans perpendiculaires à ce plan qui répondent à la question.

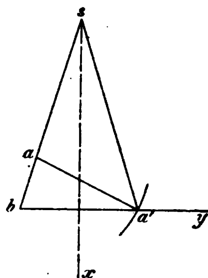


Fig. 198.

D'après ce qui précède, on peut faire passer une infinité de cônes de révolution par une ellipse donnée; le plan passant par le sommet d'un de ces cônes et le grand axe de l'ellipse est un plan méridien ; donc les sommets de tous ces cônes sont dans le plan mené par le grand axe AA' et perpendiculaire au plan de l'ellipse. On a, en outre,

$$|SA - SA'| = 2c.$$

Le lieu des sommets des cônes de révolution passant par une ellipse est donc une hyperbole ayant pour foyers les sommets de l'ellipse et pour sommets les foyers de l'ellipse; en outre, en chaque point du lieu, la tangente SX *est précisément l'axe du cône.*

Deuxième cas. — *Le plan sécant est parallèle à un plan tangent au cône.*

Supposons (fig. 199) le plan sécant parallèle au plan tangent le long de la génératrice SA'; le plan passant par l'axe SX et par SA' sera perpendiculaire au plan sécant;

nous le prendrons pour plan de la figure. Soit SA l'autre génératrice contenue dans le plan de la figure ; la trace du plan sécant sera parallèle à SA′, soit AY cette trace et

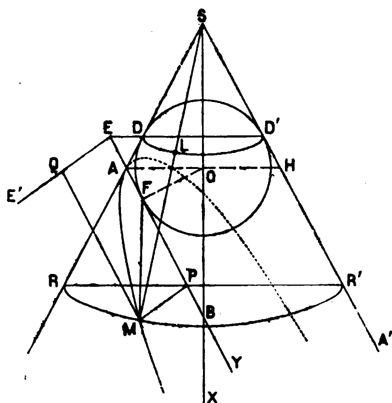


Fig. 199.

soit B le point commun à SX et AY; le triangle SAB est isocèle ; il en résulte que le centre O, du cercle tangent aux trois droites SA, SA′, AB et situé dans l'angle ASA′, est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur SX. Soient D, D′, F ses points de contact avec les trois droites considérées. Soit M un point de la section faite dans le cône par le plan sécant, c'est-à-dire par le plan mené par AY et perpendiculaire au plan ASA′. Soit EE′ l'intersection du plan sécant et du plan mené par DD′ et perpendiculaire au plan de la figure ; cette droite EE′, intersection de deux plans perpendiculaires au plan ASA′, est perpendiculaire à ce même plan ASA′. La perpendiculaire MP menée de M à la droite AY est perpendiculaire au plan ASA′, donc elle est parallèle à EE′; il en résulte que la distance MQ de M à EE′ est égale à PE. Cela posé, la droite MP étant perpendiculaire à l'axe SX,

on peut mener par MP un plan perpendiculaire à l'axe ; il coupe le cône suivant un cercle de diamètre RR′. Le plan parallèle mené par DD′ coupe le cône suivant un cercle de diamètre DD′ ; la génératrice SM coupe ce cercle en L ; on a MF = ML, comme tangentes issues de M à la sphère ayant pour grand cercle le cercle DD′F ; en second lieu, ML = R′D′ = PE. Donc MF = MQ et, par suite, la courbe d'intersection est la parabole ayant pour sommet A, pour foyer F et pour directrice EE′.

RÉCIPROQUEMENT. — *On peut toujours placer une parabole donnée sur un cône de révolution donné.*

Le triangle AOF est déterminé ; en effet, il est rectangle, le côté AF est égal à $\frac{1}{2}p$, p étant le paramètre de la parabole donnée, enfin OAF est le complément du demi-angle d'ouverture

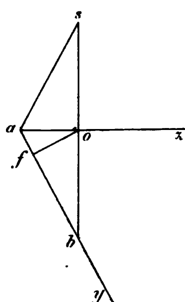


Fig. 200.

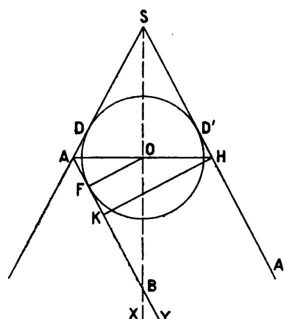


Fig. 201.

du cône. D'après cela, sur le côté ay (fig. 200) de l'angle zay égal à $90° - \frac{1}{2}\hat{S}$, portons $af = \frac{1}{2}p$, puis menons fo perpendiculaire à ay et, par le point o d'intersection avec az, élevons la perpendiculaire à az ; soit b le point de rencontre de cette perpendiculaire avec ay et soit s le symétrique de b par rapport à o. Si l'on applique sa sur SA et sb sur SX, ay prendra la direction AY et il est évident que la section du cône par le plan

perpendiculaire au plan ASX mené par AY sera une parabole égale à la proposée.

Dans la figure 201 menons HK parallèle à OF, on voit que SH = SA et que SH est perpendiculaire à KH. On en conclut que :

Le lieu des sommets des cônes de révolution menés par une parabole est une seconde parabole égale à la première, ayant pour sommet et pour foyer le foyer et le sommet de la première, et située dans un plan perpendiculaire au plan de la parabole donnée.

Troisième cas. — Le plan sécant coupe les deux nappes du cône (fig. 202). Nous procéderons comme dans le pre-

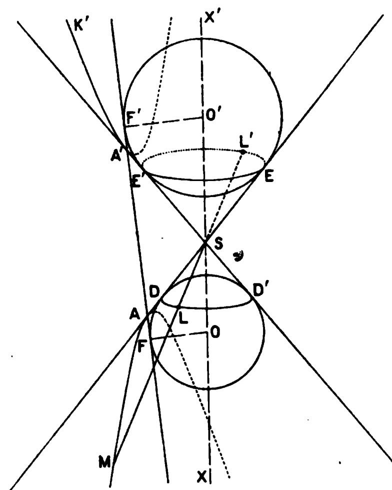


Fig. 202.

mier cas, le plan de la figure étant toujours supposé perpendiculaire au plan sécant et contenant l'axe du cône. Nous considérerons encore deux sphères inscrites au cône et tangentes en F et F' au plan sécant. Soit M un point pris sur la courbe d'intersection; on a, L et L' étant

les points de contact de la génératrice SM avec les deux sphères :

$$\text{MF}' = \text{ML}', \qquad \text{MF} = \text{ML};$$

donc

$$\text{MF}' - \text{MF} = \text{LL}' = \text{DE} = \text{AA}'.$$

La section est donc une hyperbole ayant pour foyers F, F′ et pour sommets A, A′.

En remarquant que la tangente en M est l'intersection du plan sécant et du plan tangent au cône le long de SM, on reconnaîtra aisément que les asymptotes sont les intersections du plan sécant et des plans tangents au cône menés par les deux génératrices parallèles au plan sécant, que l'on obtient en coupant le cône par le plan parallèle au plan sécant et mené par le sommet.

Réciproquement. — *Placer une hyperbole donnée sur un cône de révolution donné. — Condition de possibilité.*

Supposons le problème résolu et conservons les mêmes notations que dans la figure précédente ; en abaissant de A′ (fig. 203) la perpendiculaire A′B à l'axe du cône et prenant son

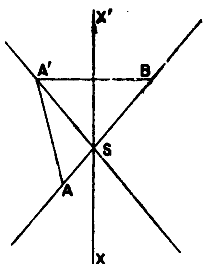


Fig. 203.

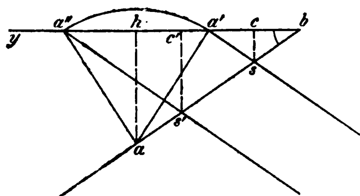


Fig. 204.

intersection B avec l'arête SA, on verra, comme pour l'ellipse, que $AB = 2c$. La question revient à construire le triangle AA′B dans lequel on connaît l'angle $A'BA = 90° - \frac{1}{2}\hat{S}$, le côté $AB = 2c$ et le côté $AA' = 2a$.

En faisant la construction bien connue, on obtient (fig. 204)

deux triangles $aa'b$, $aa''b$, d'où l'on déduit deux triangles $a'sa$, $a''s'a$, en élevant les perpendiculaires cs, $c's'$ au milieu de $a'b$ et au milieu de $a''b$.

Mais on voit que ces triangles $a'sa$, $as'a''$ sont égaux, car $aa''=aa'$ et en outre $\widehat{as'a''}=\widehat{asa'}$, et $\widehat{a''as'}=\widehat{aa's}$, car, les triangles $aa'a''$ et $a'bs$ étant isocèles, on a $\widehat{sa'b}=\widehat{b}$, $\widehat{aa'a''}=\widehat{aa''a'}$ et, par suite, $180^\circ-\widehat{sa'b}-\widehat{aa'a''}=180^\circ-\widehat{b}-\widehat{aa''a'}$. Il en résulte que les deux solutions correspondent à deux positions de AA' symétriques par rapport à SX.

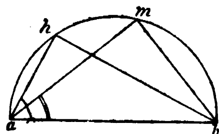


Fig. 205.

Mais, pour que ces solutions existent, il faut et il suffit que le cercle décrit de a comme centre avec $2a$ pour rayon rencontre la demi-droite by et par suite que l'on ait $2a>ah$. Or, si nous considérons (fig. 205) le demi-cercle de diamètre $ab=2c$ et les cordes $am=2a$ et ah, la condition $am>ah$ est équivalente à celle-ci :

$$\widehat{mab} < \widehat{hab}.$$

Mais $\widehat{hab}$ est précisément la moitié de l'angle d'ouverture S du cône et $\widehat{mab}$ est égal à la moitié de l'angle des asymptotes de l'hyperbole. Donc, en nommant α l'angle des asymptotes, la condition cherchée est

$$\alpha<\widehat{S}.$$

Le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à une hyperbole est une ellipse ayant pour foyers les sommets de l'hyperbole, pour sommets les foyers de l'hyperbole et dont le plan est perpendiculaire à celui de l'hyperbole.

Remarque. — Les trois courbes : ellipse, hyperbole et parabole pouvant être obtenues en coupant un cône de révolution par un plan, on les nomme ***sections coniques***, ou plus simplement *coniques*.

Apollonius supposait le plan sécant perpendiculaire à une arête du cône et il considérait trois cas suivant que l'angle d'ouverture de ce cône est aigu, droit ou obtus.

On démontrerait, en employant la même méthode que précédemment, que *la section d'un cylindre de révolution par un plan non parallèle aux génératrices est une ellipse ayant pour petit axe le diamètre du cylindre.*

260. La démonstration relative au cas de la parabole s'applique à tous les cas et permet ainsi de démontrer l'existence des directrices. La méthode de Dandelin consiste précisément à suivre cette marche.

En conservant toujours les mêmes conventions, soit (fig. 206)

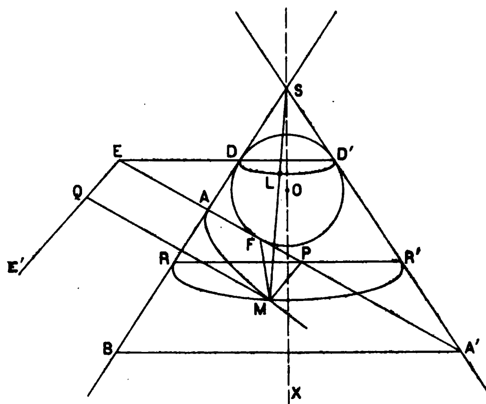


Fig. 206.

M un point de la section que nous supposerons une ellipse, et soit MP la perpendiculaire abaissée de M sur la trace AA′ du plan sécant Π sur le plan ASX de la figure. Coupons le cône par le plan perpendiculaire à son axe mené par MP : la section obtenue est un cercle de diamètre RR′. Soit EE′ l'inter-

section du plan du cercle de diamètre DD′ avec le plan Π. La distance MQ de M à EE′ est égale à PE ; on a donc

$$\frac{MF}{MQ} = \frac{RD}{PE} = \frac{AB}{AA'} = \frac{c}{a}.$$

La démonstration serait la même pour une hyperbole. On reconnaît ainsi, pour l'ellipse et l'hyperbole, l'existence d'une directrice correspondant à chaque foyer.

EXERCICES

1. Construire une conique connaissant un foyer et trois tangentes ou deux tangentes et le point de contact de l'une d'elles. — Le cercle principal ou le cercle directeur relatif à l'autre foyer sont déterminés.

2. Construire une conique connaissant un foyer, deux tangentes et un point. — On construit le cercle directeur relatif à l'autre foyer.

3. Construire une conique connaissant un sommet de l'axe focal, un foyer et une tangente.

4. Construire une conique connaissant un sommet de l'axe focal un foyer et un point.

5. Construire une conique connaissant un foyer, deux points et la tangente en l'un d'eux.

6. Construire une conique connaissant le centre, un point et une directrice. — Le symétrique du point donné par rapport au centre est un second point de la conique.

7. Construire une conique connaissant une directrice et trois points.

8. On mène, par un point M d'une hyperbole, la parallèle à une asymptote jusqu'au point P où elle rencontre une directrice. Prouver que $\frac{MQ}{MP} = \frac{a}{c}$, MQ étant la distance de M à cette directrice. En déduire que MP = MF, F étant le foyer correspondant à la directrice considérée.

9. Construire une hyperbole connaissant une asymptote, une directrice et la longueur de l'axe focal.

10. Construire une hyperbole connaissant une asymptote, un foyer et un point. — On cherche d'abord la directrice. On en a un premier point en portant, à partir du point donné M, sur la paral-

lèle à l'asymptote, une longueur égale à MF, F étant le foyer. On en a immédiatement un second point : la projection du foyer sur l'asymptote.

11. Construire une hyperbole connaissant deux points, une directrice et la direction d'une asymptote.

12. Construire une hyperbole connaissant une asymptote, une directrice et un point.

13. Construire une hyperbole connaissant une asymptote, une directrice et une tangente. — On connaît une première droite sur laquelle se trouve le foyer : c'est la perpendiculaire à l'asymptote au point où celle-ci coupe la directrice. On détermine aisément la droite joignant le foyer au point de rencontre de la directrice et de la tangente donnée, car on connaît l'excentricité.

14. On mène une *corde focale* dans une conique (c'est-à-dire une corde passant par un foyer) et les normales aux extrémités de cette corde. Prouver que la parallèle à l'axe focal menée par le point de rencontre des deux normales passe par le milieu de la corde.

15. Le point de concours des tangentes menées aux extrémités d'une corde focale est sur la directrice correspondant au foyer situé sur cette corde.

16. Mener une tangente commune à deux coniques qui ont un foyer commun. — On considère les points communs aux cercles principaux.

17. Soient M, M′ deux points d'une conique et P le point où la corde MM′ rencontre la directrice correspondant au foyer F ; prouver que FP est l'une des bissectrices de l'angle MFM′.

18. En s'appuyant sur l'exercice précédent, construire une conique dont on donne un foyer et trois points. — On cherchera la directrice correspondante.

19. Il existe un rapport constant entre la distance d'un point d'une section conique au sommet du cône et la distance de ce même point à l'intersection du plan de la section avec le plan perpendiculaire à l'axe mené par le sommet du cône.

En déduire que la projection d'une section conique sur un plan perpendiculaire à l'axe est une conique ayant pour foyer la projection du sommet du cône.

20. Trouver les points communs à une droite et à une conique dont on connaît un foyer, la directrice correspondante et l'excentricité.

CHAPITRE V

HÉLICE

261. Nous allons étudier une courbe *gauche*, c'est-à-dire une courbe dont tous les points ne sont pas dans un même plan.

Définition. — Considérons (fig. 207) un cylindre de révolution ABCD et soit RAS un angle aigu tracé dans un

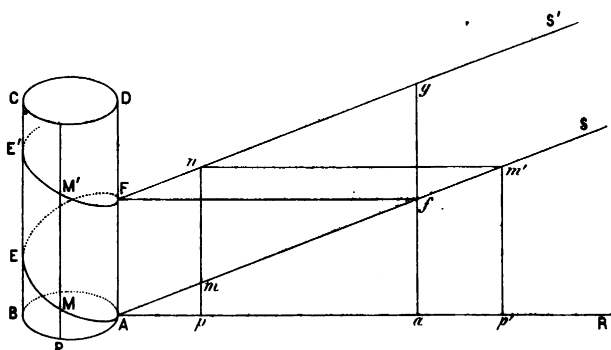


Fig. 207.

plan mené par la génératrice AD ; le sommet de cet angle est un point A de cette génératrice et le côté AR est perpendiculaire à la même génératrice. On enroule le plan de l'angle sur la surface latérale du cylindre ; alors le côté AR prend la forme de la circonférence de base du cylindre et le côté AS vient se placer sur la surface latérale en prenant la forme d'une suite d'arcs identiques à l'arc AEF.

Mais on peut donner une autre définition. Si nous pre-

nons sur la base du cylindre un arc AP et si nous menons par P la génératrice du cylindre qui rencontre la courbe précédente aux points M, M′ et si nous prenons sur AR une longueur $Ap = \text{arc}\,AP$, la perpendiculaire menée en p à AR rencontre AS en m tel que $pm = PM$.

Posons $AF = h$; h est la portion de la génératrice AD comprise entre deux points consécutifs de la courbe situés sur cette génératrice ; si nous faisons pour F les mêmes constructions que pour M, nous aurons

$$Aa = 2\pi R,$$

R désignant le rayon du cylindre, et

$$af = AF;$$

on a donc

$$\frac{pm}{Ap} = \frac{h}{2\pi R}.$$

De même, pour le point M′ :

$$\frac{p'm'}{Ap'} = \frac{h}{2\pi R}.$$

Remarquons maintenant que si l'on mène FS′ parallèle à AS, on aura $mn = h$ et $pn = p'm'$. On peut donc supposer dans le plan ARS une suite indéfinie de triangles rectangles égaux tels que Aaf, Ffg..., dont les côtés Aa, Ff... sont perpendiculaires à AD et égaux à $2\pi R$ et les côtés af, fg... égaux à une même longueur h. En enroulant le système sur le cylindre, les hypoténuses engendreront les différentes *spires* de l'*hélice de pas h*.

262. L'arc AP se nomme l'*abscisse curviligne x* de M et PM son *ordonnée y*. Pour le point M′, l'abscisse curviligne est égale à Ap'; or

$$Ap' = Ap + pp' = Ap + nm',$$

ou enfin

$$Ap' = Ap + Aa,$$

on a donc

$$x' = x + 2\pi R, \qquad y' = y + h,$$

et l'on aura les *coordonnées* de tous les points situés sur la même génératrice que M, en donnant à l'entier n toutes les valeurs de o à $+\infty$ dans les formules

$$x_n = x + n.2\pi R, \qquad y_n = y + nh.$$

En donnant à n les valeurs négatives, depuis -1 jusqu'à $-\infty$, on obtiendra les coordonnées des points de l'hélice qui sont encore sur la même génératrice, mais de l'autre côté du plan de la base du cylindre.

263. On a, d'une manière générale,

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{y + nh}{x + n.2\pi R} = \frac{h}{2\pi R};$$

car

$$\frac{y}{x} = \frac{h}{2\pi R}.$$

Donc *l'ordonnée d'un point d'une hélice est proportionnelle à son abscisse curviligne.*

La relation précédente subsiste si l'on prend pour origine un point quelconque de l'hélice, et que l'on compte les ordonnées à partir du plan perpendiculaire à l'axe du cylindre mené par ce point et les abscisses sur la section faite par ce plan.

Imaginons que la génératrice AD tourne d'un mouvement uniforme autour de l'axe OO′ du cylindre et qu'un point mobile se déplace en même temps d'un mouvement uniforme sur la génératrice mobile, ce point décrira une hélice. Si l'on nomme ω la vitesse angulaire de la génératrice et v la vitesse

relative du point sur cette génératrice, enfin si l'on suppose que le mobile parte de A à l'origine des temps, on aura

$$x = \omega R . t, \qquad y = v t;$$

donc

$$\frac{y}{x} = \frac{v}{\omega R}.$$

Le point considéré décrira donc une hélice dont le pas sera

$$h = 2\pi \frac{v}{\omega}.$$

264. ***Théorème.*** — *La tangente en chaque point d'une hélice tracée sur un cylindre de révolution fait un angle constant avec la génératrice du cylindre qui passe par ce point.*

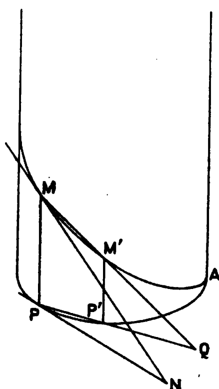


Fig. 208.

Soient (fig. 208) M et M' deux points d'une hélice de pas h, tracée sur un cylindre de révolution de rayon R. Prenons pour origine un point A et, pour plus de simplicité, supposons les ordonnées de M et M' moindres que h. Les deux cordes MM' et PP' se coupant en Q, on a

$$\frac{MP}{PQ} = \frac{M'P'}{P'Q};$$

mais

$$\frac{MP}{\text{arc AP}} = \frac{M'P'}{\text{arc AP}'};$$

donc

$$\frac{PQ}{\text{arc AP}} = \frac{P'Q}{\text{arc AP}'} = \frac{PP'}{\text{arc PP}'}$$

et, par conséquent,

$$PQ = \text{arc AP} \times \frac{PP'}{\text{arc PP}'}.$$

Si M′ tend vers M en restant sur l'hélice, P′ tend vers P, la droite PP′ a pour limite la tangente en P au cercle de base du cylindre ; or, le rapport $\frac{PP'}{\text{arc } PP'}$ ayant pour limite 1, la longueur PQ a pour limite *arc* AP ; donc, si l'on prend sur la tangente en P au cercle de base une longueur PN = arc AP, le point Q aura pour limite le point N et, par suite, la droite MM′ aura pour limite la droite MN.

On a

$$\frac{MP}{PN} = \frac{h}{2\pi R},$$

puisque PN = arc AP. Il en résulte que l'angle PMN est constant et égal à l'angle SAD de la première figure. Nous appellerons cet angle i ; on a

$$\operatorname{tg} i = \frac{2\pi R}{h} \quad \text{ou} \quad \operatorname{cotg} i = \frac{h}{2\pi R}.$$

Corollaire. — *La sous-tangente* PN *est égale à l'abscisse curviligne.*

265. Le point N décrit une courbe plane qu'on nomme *développante* du cercle de base du cylindre.

Le lieu des tangentes à l'hélice forme une surface qu'on nomme l'*hélicoïde* (ou *hélicoïde*) *développable*.

Si de chaque point de l'hélice on mène une droite s'appuyant sur l'axe du cylindre et faisant avec l'axe de ce cylindre un angle constant, la surface engendrée par cette droite se nomme la *surface de la vis à filet triangulaire*. Si l'angle est droit, c'est la surface de la *vis à filet carré*.

EXERCICES

1. Si, sur la surface d'un cylindre de révolution, on trace deux hélices se coupant à angle droit, la circonférence de base du cylindre est la moyenne géométrique des pas des deux hélices.

2. Prouver que deux hélices se coupant à angle droit sur un cylindre de révolution partagent sa surface en quadrilatères égaux.

3. Des extrémités A, A′ d'un diamètre de la base d'un cylindre de révolution partent deux hélices se coupant à angle droit. En supposant que le premier point de rencontre de ces hélices soit M, trouver en fonction du pas h de l'une de ces hélices et du rayon r du cylindre, l'aire du triangle curviligne AMA′. Quel doit être le pas h pour que AMA′ soit maximum ? (Géométrie de MM. Rouché et de Comberousse, p. 554.)

COMPLÉMENTS

CHAPITRE PREMIER

INVERSION

266. Étant donnés (fig. 209) un point fixe O, appelé *pôle d'inversion* et une constante λ, positive ou négative ($\lambda = \pm a^2$, a désignant une longueur) appelée *puissance d'inversion*, à tout point A de l'espace on fait correspondre le point A′ de la droite OA défini par la relation [1]

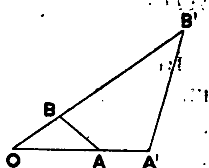


Fig. 209.

$$OA \times OA' = \lambda$$

Ce point A′ s'appelle l'*inverse* de A. Si l'on fait décrire au point A une figure F, le point A′ décrit une figure F′, qu'on appelle la *figure inverse* de F par rapport au pôle O et à la puissance λ. Réciproquement F est la figure inverse de F′; c'est ce qu'on exprime en disant que les figures F et F′ sont *réciproques*.

267. Deux couples de points inverses A et A′, B et B′,

(1) Pour simplifier l'écriture, nous désignerons désormais par OA (au lieu de $\overline{OA}$) la mesure algébrique du segment OA.

sont situés sur un même cercle ; car

$$OA \times OA' = \lambda = OB \times OB'.$$

De plus,

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'};$$

donc les triangles OAB, OB'A' sont semblables comme ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels ; par conséquent

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{OA.OA'}{OA.OB} = \frac{\lambda'}{OA.OB};$$

d'où

$$A'B' = AB \times \frac{\lambda'}{OA.OB},$$

λ' désignant la valeur absolue de la puissance λ. Nous verrons plus loin la portée de cette remarque.

Remarque. D'après ce qui vient d'être établi on peut définir l'inversion de la manière suivante : deux figures planes F et F' sont des figures inverses quand, à chaque point M de la première, correspond un point M' de la seconde et un seul, de façon que la droite MM' passe par un point fixe O, qui est le pôle d'inversion et que deux couples quelconques de points correspondants M, M' et N, N' soient sur un cercle. Etant donnés deux points inverses A, A' et un point B, par exemple, on obtient l'inverse B' de B en traçant le cercle qui passe par A, A', B ; B' est le second point d'intersection de ce cercle avec la droite OB.

Si $\lambda = +a^2$, deux points correspondants M, M' sont conjugués harmoniques par rapport au cercle de centre O et de rayon a qu'on appelle cercle d'inversion ; tout cercle passant par M et M' coupe orthogonalement le cercle d'inversion. A tout point du cercle d'inversion correspond le même point, de sorte que les points de ce cercle sont des points doubles.

Si $\lambda = -a^2$, à chaque point du cercle de centre O et de rayon a correspond le point diamétralement opposé.

Dans l'espace, si $\lambda = + a^2$, la sphère de centre O et de rayon a se nomme sphère d'inversion. Tous ses points sont doubles. Deux points correspondants M, M' sont conjugués harmoniques par rapport à la sphère d'inversion, qui coupe orthogonalement toute sphère passant par M et M'.

268. ***Théorème.*** — *Deux figures* F', F'' *inverses d'une même figure* F *par rapport à un même pôle* O *et à deux puissances différentes* λ', λ'' *sont homothétiques.*

En effet, soient M un point de F, M' et M'' les points correspondants de F' et F''. On a

$$OM \times OM' = \lambda' \text{ , } OM \times OM'' = \lambda'';$$

d'où

$$\frac{OM'}{OM''} = \frac{\lambda'}{\lambda''}.$$

Donc les figures F' et F'' sont homothétiques ; le point O est le centre et $\frac{\lambda'}{\lambda''}$ le rapport d'homothétie.

Application. — Soit C un cercle ne passant pas par le pôle et situé dans un plan qui passe par le pôle. Si l'on prend pour puissance d'inversion la puissance du pôle par rapport au cercle C, la figure inverse du cercle C est ce cercle lui-même ; donc, si l'on prend une autre puissance quelconque, la figure inverse du cercle C est une figure homothétique au cercle C, c'est-à-dire un cercle.

Réciproquement, deux cercles situés dans un même plan peuvent être regardés comme inverses de deux façons différentes, en prenant pour pôle l'un ou l'autre des centres d'homothétie ; car le produit des distances d'un centre d'homothétie à deux points antihomologues est constant [186].

On démontre de même que la figure inverse d'une sphère qui ne passe pas par le pôle est une sphère et que deux sphères quelconques peuvent être regardées comme inverses de deux façons différentes.

La figure inverse d'un cercle qui ne passe pas par le pôle est un cercle; car on peut le regarder comme l'intersection de deux sphères qui ne passent pas par le pôle.

269. ***Théorème***. — *La figure inverse d'un cercle* C *qui passe par le pôle* O (fig. 210) *est une droite perpendiculaire au diamètre qui passe par le pôle.*

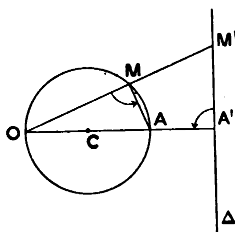


Fig. 210.

En effet, soient M′ le point inverse d'un point quelconque M du cercle et A′ le point inverse de l'extrémité A du diamètre qui passe par le pôle. Les quatre points A, M, A′, M′ sont sur un même cercle; donc, puisque l'angle OMA est droit comme inscrit à un demi-cercle, l'angle OA′M′ l'est aussi. Par conséquent, le lieu de M′ est la perpendiculaire menée par A′ au diamètre OA.

Le même raisonnement prouve que *la figure inverse d'une droite* Δ *ne passant pas par le pôle est un cercle qui passe par le pôle et dont le centre est sur la perpendiculaire à la droite* Δ *menée par le pôle.*

Quant à la figure inverse d'une droite passant par le pôle, c'est évidemment cette droite elle-même.

On démontre de même que la figure inverse d'une sphère passant par le pôle est un plan et que la figure inverse d'un plan ne passant pas par le pôle est une

sphère. La figure inverse d'un plan passant par le pôle est évidemment ce plan lui-même.

270. ***Théorème***. — *L'inversion conserve les angles.* — Nous allons d'abord démontrer que les tangentes à deux courbes inverses Γ et Γ' en deux points correspondants A et A′ (fig. 211) sont symétriques par rapport au plan perpendiculaire au milieu de AA′.

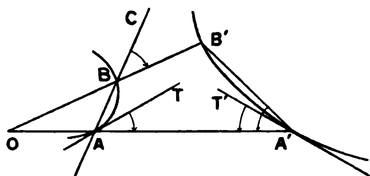


Fig. 211.

En effet, soient B et B′ deux autres points correspondants des deux courbes ; les quatre points A, B, A′, B′ étant sur un même cercle, l'angle B′A′A est égal à CBB′; si donc on suppose que B se rapproche indéfiniment de A et, par suite, B′ de A′, comme les droites AB, A′B′ ont pour limites respectives les tangentes AT, A′T′, on voit que les angles TAA′ et T′A′A sont égaux, mais de *sens contraires*. D'ailleurs, les droites AB, A′B′ sont constamment dans un plan passant par AA′ ; donc il en est de même des tangentes AT, A′T′ et alors, les angles TAA′, T′A′A étant égaux et de sens contraires, ces tangentes sont symétriques par rapport au plan perpendiculaire au milieu de AA′.

Ensuite, soient A, A′ deux points correspondants de deux surfaces inverses Σ, Σ'. Traçons, sur la surface Σ, deux lignes quelconques Γ, Γ_1 passant par A ; leurs inverses Γ', Γ'_1 passent par A′ et appartiennent à la surface Σ'. Le plan tangent en A à la surface Σ est défini [145] par les tangentes en A aux lignes Γ et Γ_1 ; le plan tangent en A′ à la surface Σ' est défini par les tangentes en A′

aux lignes Γ' et Γ'_1. Donc, d'après ce qui précède, *ces deux plans tangents sont aussi symétriques par rapport au plan perpendiculaire au milieu de* AA'.

Cela posé :

1° Soient Γ et Γ_1 deux lignes qui se coupent en un point A ; leurs inverses Γ', Γ'_1 se coupent au point A' inverse de A. L'angle en A des deux lignes Γ, Γ_1 est, par définition, l'angle de leurs tangentes en A : AT et AT_1 ; l'angle en A' des deux lignes Γ', Γ'_1 est l'angle de leurs tangentes en A' : A'T' et $A'T'_1$. Ces deux angles TAT_1, $T'A'T'_1$ sont égaux comme symétriques par rapport au plan perpendiculaire au milieu de AA'.

2° Soit A un point commun à deux surfaces Σ et Σ_1 ; leurs inverses, Σ' et Σ'_1 passent par le point A' inverse de A. L'angle en A des deux surfaces Σ, Σ_1 est, par définition, le dièdre formé par leurs plans tangents en A ; l'angle en A' des deux surfaces Σ', Σ'_1 est le dièdre formé par leurs plans tangents en A'. Ces deux dièdres sont égaux, comme symétriques par rapport au plan perpendiculaire au milieu de AA'.

Cas particulier. — *Quand deux lignes, ou deux surfaces, sont tangentes, leurs inverses le sont aussi.*

271. La transformation par inversion est l'une des méthodes les plus fécondes pour la résolution des problèmes, aussi bien que pour la démonstration des théorèmes et la découverte de vérités nouvelles.

Ainsi, proposons-nous de construire un cercle passant par deux points donnés A, B et tangent à un cercle donné C. Transformons la figure par inversion en prenant pour pôle le point A ; au point B correspond un point B', au

cercle C correspond un cercle C′ et au cercle demandé, qui passe par le pôle, correspond une droite Δ′ passant par B′ et tangente au cercle C′. On construira cette droite Δ′ et la figure inverse de cette droite sera le cercle demandé.

Pour montrer comment l'inversion s'applique à la démonstration des théorèmes, considérons (fig. 212) un quadrilatère convexe OABC inscrit à un cercle. Transformons la figure par inversion, en prenant pour pôle le point O ; au cercle correspond une droite Δ et aux points A, B, C correspondent trois points A′,B′,C′ de la droite Δ. De plus, le quadrilatère OABC étant convexe, le point B′ est situé entre A′ et C′; donc

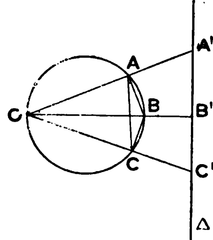


Fig. 212.

$$A'C' = A'B' + B'C'. \tag{1}$$

Or [267]

$$A'C' = AC \times \frac{\lambda'}{OA \times OC},$$

$$A'B' = AB \times \frac{\lambda'}{OA \times OB},$$

$$B'C' = BC \times \frac{\lambda'}{OB \times OC}.$$

Donc

$$\frac{AC}{OA.OC} = \frac{AB}{OA.OB} + \frac{BC}{OB.OC}$$

ou

$$AC.OB = AB.OC + BC.OA, \tag{2}$$

ce qui prouve que, dans un quadrilatère convexe inscriptible, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.

Réciproquement, si la relation (2) est vérifiée, la relation (1) l'est aussi. On en conclut d'abord que A′,B′,C′ sont en ligne droite ; donc A,B,C sont sur un cercle passant par O. Ensuite, le point B′ est entre A′ et C′, donc le point B est dans l'angle AOC. Par conséquent, le quadrilatère OABC est inscriptible et convexe.

EXERCICES

1. Par deux points fixes A et B, on mène deux droites AC et BD faisant un angle donné et telles que le produit AC × BD soit égal à un carré donné; démontrer que, si le point C décrit un cercle, le point D décrit un autre cercle.

2. Par un point A commun à deux cercles, mener une sécante rencontrant ces deux cercles en deux points B et C tels que le produit AB × AC soit égal à un carré donné.

3. Etant donnés deux cercles et un point A, trouver sur les deux cercles deux points B et C tels que l'angle BAC soit égal à un angle donné et que l'aire du triangle ABC soit égale à un carré donné.

4. Si deux cercles passant par un point fixe et touchant une droite donnée se coupent sous un angle constant, leur second point d'intersection décrit un cercle.

5. On considère un losange articulé ABCD dont deux sommets opposés B et D sont reliés à un point fixe O par deux tiges de même longueur ; démontrer que, quand le système se déforme, les points A et C décrivent deux figures inverses (Inverseur de Peaucellier).

CHAPITRE II

NOTIONS DE PERSPECTIVE

272. On appelle perspective d'un point m (fig. 213) par rapport à un point o appelé *point de vue* et à un plan P nommé *tableau*, le point m' d'intersection du tableau et de la droite om joignant le point de vue au

point considéré. La perspective d'une figure est le lieu des perspectives des points de cette figure.

On voit que la perspective d'une droite ne passant pas par le point de vue est une droite, intersection du plan du tableau et du plan déterminé par le point de vue et la droite donnée. La perspective $m'n'$ de la droite mn passe par le point f où le plan du tableau est percé par la parallèle à mn menée par le point de vue. Ce point f se

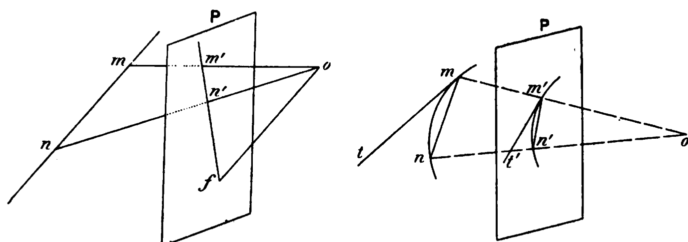


Fig. 213 et 214.

nomme le *point de fuite;* on peut le regarder comme la perspective du point à l'infini de la droite mn ; car, si le point n s'éloigne indéfiniment sur cette droite, sa perspective n' a pour limite f.

Plusieurs droites parallèles entre elles et non parallèles au tableau ont le même point de fuite. On convient de dire que des droites parallèles ont le même point à l'infini.

Quand une droite est parallèle au tableau, son point de fuite est rejeté à l'infini. Plusieurs droites parallèles entre elles et parallèles au tableau ont leurs perspectives parallèles.

La perspective d'une droite passant par le point de vue se réduit à un point, le point où elle rencontre le tableau.

A une tangente à une courbe correspond, en général,

la tangente à sa perspective ; car, si *mt* est la limite de la corde *mn* (fig. 214), quand *n* s'approche indéfiniment de *m*, *m't'*, perspective de *mt*, sera la limite de la droite *m'n'*, perspective de *mn*. Il y a exception, quand la tangente passe par le point de vue, car alors sa perspective se réduit à un point.

273. Soit (fig. 215) Q un plan non parallèle au tableau et *f* le point de fuite d'une droite *mn* de ce plan. La droite *of* est dans le plan R parallèle à Q mené par le point de vue ; donc le point de fuite *f* est sur l'intersection xy des deux plans P et R. Cette droite xy s'appelle la *ligne de fuite* du plan Q. Mais *f* est la perspective du point à l'infini sur *mn* ; tous les points à l'infini du plan Q ont donc leur perspective sur la droite xy. On peut donc regarder ces points à l'infini comme étant sur une droite entièrement rejetée à l'infini et qu'on nomme la *droite de l'infini du plan* Q.

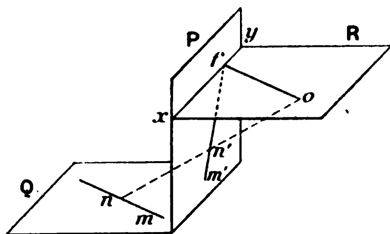


Fig. 215.

Quand deux plans sont parallèles, toute droite de l'un est parallèle à des droites de l'autre ; donc les points à l'infini de ces deux plans sont les mêmes et, par conséquent, la droite de l'infini est aussi la même et peut être regardée comme l'intersection de ces deux plans.

Deux plans parallèles entre eux et non parallèles au tableau ont la même ligne de fuite et cette ligne doit être regardée comme la perspective de la droite de l'infini commune aux deux plans.

Quand un plan est parallèle au tableau, sa ligne de fuite est rejetée à l'infini.

274. La perspective s'appelle aussi *projection centrale.* On dit qu'une propriété d'une figure est *projective*, quand elle s'applique à toutes les perspectives de cette figure. Les propriétés *descriptives*, c'est-à-dire celles qui se rapportent uniquement à la situation des lignes, indépendamment de toute notion de mesure, sont nécessairement projectives : si trois points sont en ligne droite, leurs perspectives le sont aussi ; si trois droites sont concourantes, il en est de même de leurs perspectives.

Au contraire, les propriétés *métriques*, c'est-à-dire celles qui se rapportent à la mesure des grandeurs, ne sont pas en général projectives ; par exemple, si un point est le milieu d'une droite, sa perspective n'est pas, en général, le milieu de la perspective de cette droite. Néanmoins, il existe, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, des propriétés métriques qui sont aussi projectives.

Quoi qu'il en soit, quand on a reconnu qu'une propriété est projective, pour la démontrer, il suffit de faire voir qu'elle est vraie pour l'une quelconque des perspectives de la figure. Ce procédé constitue une méthode générale de démonstration qu'on appelle la méthode *par projection*. D'ordinaire, on projette la figure donnée, de façon qu'un point ou une droite de cette figure soit rejeté à l'infini dans la perspective.

Ainsi, soit à démontrer que, *si deux triangles abc, $a'b'c'$ sont tels que les points de concours des droites bc et $b'c'$, ca et $c'a'$, ab et $a'b'$ soient sur une droite Δ, les droites aa' bb', cc' concourent en un même point.* On projette la

figure de façon que la droite Δ ait pour perspective la droite de l'infini du plan du tableau ; on est alors ramené à démontrer la même propriété pour des triangles ayant leurs côtés parallèles chacun à chacun et, en effet, ces triangles sont homothétiques [160].

EXERCICES

1. Toute figure située dans un plan parallèle au tableau est semblable à sa perspective.
2. Si deux triangles abc, $a'b'c'$ sont tels que les droites aa', bb', cc' concourent en un même point, les points de concours des droites bc et $b'c'$, ca et $c'a'$, ab et $a'b'$ sont en ligne droite.
3. Si les diagonales de deux quadrilatères dont l'un est inscrit à l'autre concourent en un même point, les quatre points de concours des côtés opposés sont sur une même droite.
4. Etant donné un quadrilatère, comment faut-il choisir le point de vue pour que la perspective de ce quadrilatère soit un rectangle ?

CHAPITRE III

RAPPORT ANHARMONIQUE. — DIVISION HARMONIQUE

275. Etant donnés quatre points en ligne droite A, B, C, D, nous appellerons rapport anharmonique de ces quatre points et nous désignerons par la notation (ABCD) le rapport

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}.$$

Ce rapport ne change pas quand on permute deux des points, pourvu que l'on permute en même temps les deux autres. En effet,

$$(ABCD) = \frac{CA.DB}{CB.DA} = \frac{DB.CA}{DA.CB} = \frac{AC.BD}{AD.BC} = \frac{BD.AC}{BC.AD};$$

c'est-à-dire

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

Si le point D est à l'infini, $\frac{DA}{DB} = 1$ [132]; donc, en désignant par ∞ le point à l'infini, on a

$$(ABC\infty) = \frac{CA}{CB}.$$

De même,

$$(AB\infty D) = \frac{DB}{DA},$$

$$(A\infty CD) = \frac{AC}{AD},$$

$$(\infty BCD) = \frac{BD}{BC}.$$

276. Si $(ABCD) = -1$, ou

$$\frac{CA}{CB} = -\frac{DA}{DB}, \tag{1}$$

on dit que C et D sont *conjugués harmoniques* par rapport à A et B. L'égalité précédente pouvant être mise sous la forme

$$\frac{AC}{AD} = -\frac{BC}{BD},$$

on en conclut que A et B sont conjugués harmoniques par rapport à C et D. On dit encore que les quatre points A, B, C, D, forment une *division harmonique*. On convient d'énoncer ces quatre points de façon que les deux premiers soient conjugués par rapport aux deux derniers.

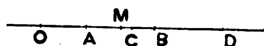


Fig. 216.

Prenons sur la droite AB une origine quelconque O (fig. 216) et désignons par a, b, c, d, les mesures algébriques des segments OA, OB, OC, OD ; nous aurons [131]

$$CA = OA - OC = a - c, \text{ etc.}$$

En substituant dans l'égalité (1), il vient

$$\frac{a-c}{b-c}+\frac{a-d}{b-d}=0$$

ou

$$(a+b)(c+d)=2(ab+cd). \qquad (2)$$

La relation (2) est équivalente à la relation (1) et peut servir à définir la conjugaison harmonique des quatre points A, B, C, D.

En plaçant diversement l'origine, on met cette relation sous différentes formes particulières.

1° Si l'on met l'origine en D de sorte que $d=0$, la relation (2) devient

$$(a+b)\,c=2ab,$$

c'est-à-dire

$$(\mathrm{DA}+\mathrm{DB})\,\mathrm{DC}=2\mathrm{DA}.\mathrm{DB}, \qquad (3)$$

ou

$$\frac{1}{\mathrm{DA}}+\frac{1}{\mathrm{DB}}=\frac{2}{\mathrm{DC}}. \qquad (4)$$

Si M est le milieu de AB, $\mathrm{DA}+\mathrm{DB}=2\mathrm{DM}$ et la relation (3) devient

$$\mathrm{DM}.\mathrm{DC}=\mathrm{DA}.\mathrm{DB}.$$

2° Si l'on met l'origine au milieu M de AB, $a+b=0$ et la relation (2) devient

$$cd=-ab=b^2,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{MC}.\mathrm{MD}=\overline{\mathrm{MB}}^2.$$

Le produit MC. MD est positif ; donc les points C et D sont du même côté par rapport au milieu de AB.

Si $\mathrm{MC}=\mathrm{MB}$, on a aussi $\mathrm{MD}=\mathrm{MB}$; donc le point B est à lui-même son conjugué par rapport à AB. Il en est de même de A.

Si MC tend vers zéro, MD augmente indéfiniment ; c'est-à-dire que le conjugué du milieu M de AB est le point à l'infini sur la droite AB.

277. ***Théorème fondamental.*** — *Le rapport des points d'intersection d'un faisceau de quatre droites concourantes avec une transversale quelconque est indépendant de la position de cette transversale.*

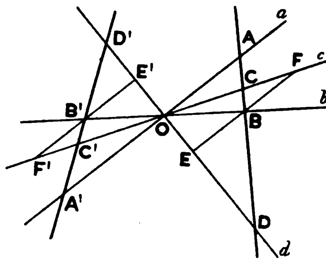


Fig. 217.

Soit (fig. 217) O.*abcd* un faisceau de quatre droites concourantes coupées en A, B, C, D, par une transversale ; menons par B la parallèle à O*a*, qui rencontre *od* en E, O*c* en F. On a, en grandeur et en signe,

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AO}{BF}, \quad \frac{DA}{DB} = \frac{AO}{BE}$$

d'où

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} \text{ ou } (ABCD) = \frac{BE}{BF}. \tag{1}$$

En faisant les mêmes raisonnements pour une deuxième transversale A'B'C'D', on trouve

$$(A'B'C'D') = \frac{B'E'}{B'F'}.$$

Mais, comme EF et E'F' sont parallèles, $\frac{BE}{BF} = \frac{B'E'}{B'F'}$; donc

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Le rapport (ABCD) est donc indépendant de la position de la transversale; on l'appelle le *rapport anharmo-*

nique du faisceau et on le représente par la notation $(O.abcd)$.

Le théorème subsiste évidemment dans le cas où les quatre droites concourent à l'infini, c'est-à-dire sont parallèles. Il subsiste encore quand la sécante est parallèle à une des droites du faisceau; par exemple, la sécante EBF est parallèle à la droite a, elle rencontre cette droite en un point à l'infini; on a donc en vertu de (1)

$$(ABCD) = (\infty BFE).$$

Remarque. — Le théorème précédent peut s'énoncer en disant que le rapport anharmonique de quatre points

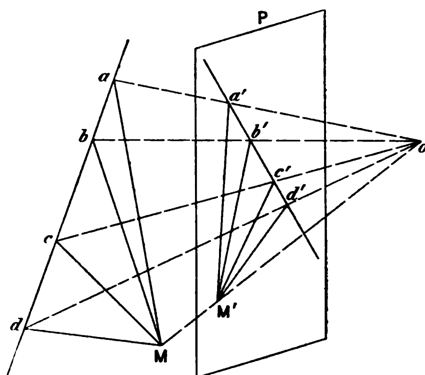


Fig. 218.

a, b, c, d (fig. 218) en ligne droite est égal au rapport anharmonique de leurs perspectives a', b', c', d'.

Le rapport anharmonique d'un faisceau est égal au rapport anharmonique de la perspective de ce faisceau; car si l'on coupe le faisceau $M.abcd$ par une droite $abcd$, on aura

$$(M.abcd) = (abcd), \qquad (M'.a'b'c'd') = (a'b'c'd');$$

donc les premiers membres sont égaux, puisque les seconds le sont.

On dit, pour exprimer ces propriétés, que le rapport anharmonique est *projectif*. Il en est de même, par suite, du rapport harmonique.

278. Revenons à la figure 217. Quand le rapport $(O.abcd)$ est égal à -1, on dit que le faisceau $O.abcd$ est *harmonique,* que les droites c et d sont *conjuguées harmoniques par rapport aux droites a et b* réciproquement. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $\frac{BE}{BF} = -1$, c'est-à-dire que le point B soit le milieu de EF.

Il en résulte que, étant données trois droites concourantes Oa, Ob, Oc, pour construire la conjuguée de Oc, par rapport à Oa, Ob, il n'y a qu'à mener une parallèle à Oa rencontrant Ob en B, Oc en F, prolonger FB d'une longueur BE égale à FB et tracer OE qui est la droite cherchée.

279. On dit que deux points P et Q sont *conjugués harmoniques par rapport à un système de deux droites,* lorsque ces points sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points d'intersection de la droite PQ avec les deux droites du système.

Théorème. — *Le lieu des conjugués harmoniques d'un point* P *par rapport à un système de deux droites concourantes* OX, OY (fig. 219) *est une droite passant par le point de concours de ces deux droites.*

En effet, si Q est un point conjugué harmonique de P par rapport aux deux droites OX, OY, c'est-à-dire par

rapport aux points A et B où la droite PQ rencontre OX, OY, le faisceau O.PQAB est harmonique; donc le point Q se trouve sur la droite OZ conjuguée de OP par rapport aux droites OX, OY. Et réciproquement. Il en résulte que le lieu demandé est la droite OZ et, en outre, on voit que ce lieu reste le même quand le point P se déplace sur une droite OV passant par O.

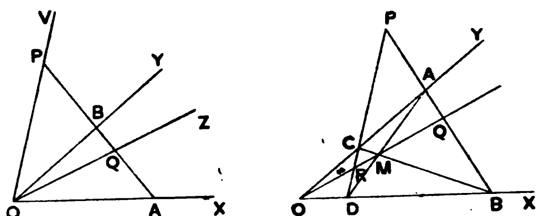


Fig. 219 et 220.

La droite OZ s'appelle la *polaire* de P par rapport au système des deux droites OX, OY, ou par rapport à l'un quelconque des angles qu'elles forment. On peut la construire par le procédé indiqué au n° 278.

Voici une autre construction au moyen de la règle seule : menons par P (fig. 220) deux sécantes rencontrant OX en B et D, OY en A et C, puis traçons les droites AD, BC qui se coupent en M. Je dis que OM est la polaire de P. En effet, soient Q et R les conjugués de P par rapport à AB et à CD. La droite QR étant la polaire de P, par rapport à l'angle XOY et aussi par rapport à l'angle AMB, passe par les sommets O et M de ces deux angles; donc elle se confond avec la droite OM.

Tout ce qui précède subsiste quand le point O est à l'infini. Donc le lieu des conjugués harmoniques d'un point P par rapport à un système de deux droites parallèles est une droite qui leur est parallèle et qu'on appelle

la *polaire* du point P par rapport à ces deux droites ; on la construit au moyen de la règle, par le procédé indiqué ci-dessus.

EXERCICES

1. **Chacune des trois diagonales OM, AB, CD (fig. 220) d'un quadrilatère complet OMABCD est divisée harmoniquement par les deux autres.**

2. **La parallèle aux bases d'un trapèze menée par le point de rencontre des diagonales coupe les deux autres côtés en deux points équidistants du point de rencontre des diagonales. Pour le démontrer, on considérera le quadrilatère complet formé par les bases et les diagonales du trapèze (exercice précédent).**

3. **Démontrer que**

$$(ABCD) + (ACBD) = 1.$$

4. **Pour que quatre points A, B, C, D forment une division harmonique, il faut et il suffit que**

$$AB.CD = 2BC.DA$$

CHAPITRE IV

CERCLES ORTHOGONAUX. POLAIRES. PLAN RADICAL. SPHÈRES ORTHOGONALES. PLAN POLAIRE

CERCLES ORTHOGONAUX

280. En général, lorsque deux lignes se coupent en un point M, on appelle *angle de ces deux lignes en ce point* M l'angle formé par les tangentes MT, MT′ à ces deux lignes en ce point ; si cet angle est droit, on dit que les deux lignes *se coupent orthogonalement en* M.

En particulier, considérons deux cercles (fig. 221) de

centres O et O′, qui se coupent orthogonalement en M; comme la figure est symétrique par rapport à la ligne des centres OO′, ils se coupent aussi orthogonalement en l'autre point d'intersection M′. On exprime ce double fait en disant que les deux cercles sont *orthogonaux*.

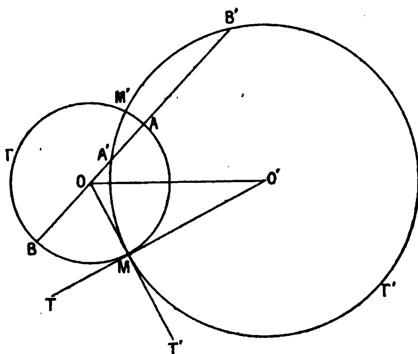


Fig. 221.

Or la tangente MT au cercle O est perpendiculaire au rayon MO; donc, pour qu'elle soit perpendiculaire à la tangente MT′ au cercle O′, il faut et il suffit que les droites MT′ et MO coïncident. Mais alors, si l'on mène par le centre O de l'un des deux cercles une sécante rencontrant les deux cercles en A et B, A′ et B′, on a

$$OA'.OB' = \overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2.$$

Donc les quatre points A, B, A′, B′ forment une division harmonique.

Réciproquement, si quatre points A, B, A′, B′ forment une division harmonique, tout cercle Γ′ passant par A′ et B′ est orthogonal au cercle Γ de diamètre AB. En effet, les points A′, B′ sont l'un intérieur, l'autre extérieur au segment AB; donc le cercle Γ′ passant par A′B′ coupe le

cercle Γ de diamètre AB. En appelant M l'un des points d'intersection et O le milieu de AB, on a

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 = OA'.OB';$$

donc le rayon OM est tangent au cercle Γ′ et, par conséquent, les deux cercles sont orthogonaux.

POLAIRE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN CERCLE

281. Cela posé, soient (fig. 222) A et B deux points du plan d'un cercle de centre O. Si la droite AB rencontre le cercle en deux points C et D conjugués harmoniques par rapport à AB, le cercle de diamètre AB est orthogonal au cercle O; réciproquement, si le cercle de diamètre AB est orthogonal au cercle O et que la droite AB coupe le cercle O en deux points C et D, ces deux points sont conjugués harmoniques par rapport à AB.

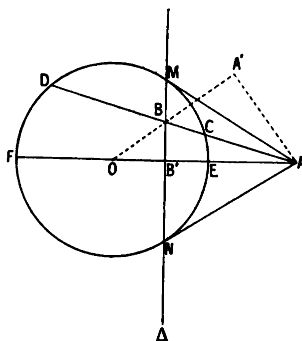


Fig. 222.

Dans tous les cas, que AB rencontre ou non le cercle O, nous dirons que les deux points A et B sont *conjugués par rapport au cercle* O, lorsque le cercle de diamètre AB est orthogonal au cercle O.

Soient E et F les points de rencontre du cercle O et de la droite OA et soit B′ la projection de B sur cette droite. Le cercle de diamètre AB passe par A et B′; donc, pour

qu'il soit orthogonal au cercle O de diamètre EF, c'est-à-dire pour que A et B soient conjugués par rapport au cercle O, il faut et il suffit que les quatre points A, B', E, F forment une division harmonique, ou que, en désignant par r le rayon du cercle, on ait

$$OA.OB' = r^2. \qquad (1)$$

Quels que soient les trois points O, A, B, en désignant par A' la projection de A sur OB et par B' la projection de B sur OA, on a

$$OA.OB' = OB.OA'.$$

Donc, si l'on convient d'appeler *produit géométrique de deux vecteurs* le produit de l'un d'eux par la projection de l'autre sur lui, on voit que la relation (1), qui exprime la conjugaison des points A et B par rapport au cercle O, peut s'énoncer en disant que *le produit géométrique des deux vecteurs* OA *et* OB *est égal au carré du rayon du cercle.*

Cette relation (1) prouve que le lieu des conjugués de A par rapport au cercle est la perpendiculaire Δ à la droite OA menée par le point B' de cette droite défini par la relation (1). La droite Δ s'appelle *la polaire du point* A *par rapport au cercle.*

La relation (1) montre encore que, étant donnée dans le plan du cercle O une droite quelconque Δ *ne passant pas par le centre de ce cercle,* il existe un point A et un seul dont cette droite soit la polaire ; ce point A se nomme le *pôle de la droite* Δ *par rapport au cercle.*

1° Si le point A est sur le cercle, $OA = r$, donc aussi $OB' = r$, c'est-à-dire que *la polaire d'un point du cercle est la tangente en ce point.*

2° Si le point A est extérieur au cercle (fig. 222), $OA > r$, donc $OB' < r$: la polaire Δ coupe le cercle en deux points M et N, qui, étant conjugués de A, sont, d'après ce qu'on vient de voir [1°], les points de contact des tangentes issues de A. Donc *la polaire d'un point extérieur est la droite qui joint les points de contact des tangentes issues de ce point.*

3° Si A est intérieur au cercle, $OA < r$, donc $OB' > r$; dans ce cas, la polaire Δ est extérieure au cercle.

282. **Théorème fondamental.** — *Si un point* A *est sur la polaire d'un point* B, *réciproquement le point* B *est sur la polaire du point* A; car A et B sont conjugués.

En d'autres termes, *si deux droites sont telles que la première passe par le pôle de la seconde, réciproquement la seconde passe par le pôle de la première.* On exprime ce fait en disant que ces deux droites sont *conjuguées par rapport au cercle.*

Corollaires. — I. *Le pôle de la droite passant par deux points est le point commun aux polaires de ces deux points.* Réciproquement, *la polaire du point d'intersection de deux droites est la droite passant par les pôles de ces deux droites.*

II. *Si un point décrit une droite, sa polaire pivote autour du pôle de cette droite.* Si le point décrit la droite dans un sens déterminé, la polaire pivote dans un sens déterminé; si le premier sens est renversé, il en est de même du second. Réciproquement, *si une droite pivote autour d'un point, son pôle décrit la polaire de ce point.*

283. **Construction de la polaire au moyen de la règle.** — Menons par A (fig. 223) deux sécantes rencontrant le cercle, l'une en B et C, l'autre en B′ et C′. Soient D le point d'intersection des deux droites BB′, CC′ et E celui des droites BC′, CB′; je dis que DE est la polaire de A. En effet, soient H et H′ les conjugués harmoniques de A par rapport à BC et à B′C′; la droite HH′ est la polaire de A par rapport au cercle et aussi par rapport aux deux angles BDC, BEC; donc elle passe par les sommets D et E de ces deux angles; donc elle coïncide avec la droite DE.

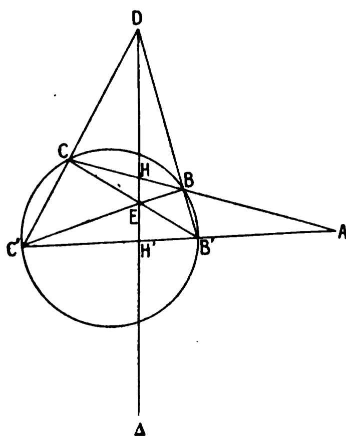


Fig. 223.

PLAN RADICAL. SPHÈRES ORTHOGONALES

284. Étant donnés une sphère et un point A, si l'on mène par ce point deux sécantes rencontrant la sphère, l'une en B et C, l'autre en B′ et C′, on a

$$AB.AC = AB'.AC';$$

car les quatre points B, C, B′, C′ appartiennent au cercle d'intersection de la sphère et du plan des deux sécantes.

Le produit AB.AC *est donc indépendant de la direction de la sécante* ABC; ce produit s'appelle *la puissance du*

point A *par rapport à la sphère*. On démontre, comme en géométrie plane [G. P. 169], qu'il a pour expression $d^2 - r^2$, en désignant par d la distance du point A au centre de la sphère et par r le rayon de celle-ci.

Il en résulte, comme au n° 172 de la Géométrie plane, que *le lieu des points qui ont même puissance par rapport à deux sphères est un plan perpendiculaire à la droite des centres*. Ce plan s'appelle *le plan radical des deux sphères*.

Tout point commun à deux sphères appartient évidemment à leur plan radical.

Donc :

Le plan radical de deux sphères qui se coupent est le plan du cercle commun à ces deux sphères; le plan radical de deux sphères tangentes est le plan tangent à ces deux sphères mené par leur point de contact.

285. Nous avons dit [182] que deux sphères *se coupent orthogonalement* quand les plans tangents à ces deux sphères en un de leurs points communs sont rectangulaires, c'est-à-dire quand le plan tangent en ce point à l'une des sphères passe par le centre de l'autre.

Donc :

Pour que deux sphères soient orthogonales, il faut et il suffit que la puissance du centre de l'une, par rapport à l'autre, soit égale au carré du rayon de la première.

Par conséquent, *le lieu des centres des sphères orthogonales à deux sphères est le plan radical de ces deux sphères, si elles ne se coupent pas; c'est la portion de ce plan extérieure aux deux sphères, si elles se coupent.*

En répétant le raisonnement que nous avons fait plus haut [280] sur deux cercles, on démontre que *deux sphères orthogonales déterminent une division harmonique sur toute droite passant par le centre de l'une et rencontrant l'autre.* Réciproquement, *si quatre points* A, B, A', B' *forment une division harmonique, toute sphère passant par* A' *et* B' *est orthogonale à la sphère de diamètre* AB.

286. *Étant données trois sphères dont les centres* A, B, C *ne sont pas en ligne droite, les trois plans radicaux de ces sphères considérées deux à deux passent par une même droite perpendiculaire au plan des trois centres, qu'on appelle l'axe radical des trois sphères.*

Car le plan radical des sphères A et B et celui des sphères A et C, étant respectivement perpendiculaires aux droites concourantes AB et AC, se coupent suivant une droite perpendiculaire au plan ABC; tout point de cette droite a même puissance par rapport aux trois sphères et, par conséquent, appartient au plan radical des sphères B et C.

Étant données quatre sphères dont les centres A, B, C, D *ne sont pas dans un même plan, les six plans radicaux de ces quatre sphères ont un point commun et un seul; ce point se nomme le centre radical des quatre sphères.*

Car le plan radical des sphères A et B, celui des sphères A et C et celui des sphères A et D, étant respectivement perpendiculaires aux trois arêtes AB, AC, AD

d'un trièdre, se coupent en un point unique [83]; ce point ayant même puissance par rapport aux quatre sphères appartient aux trois autres plans radicaux.

PLAN POLAIRE ET POLE PAR RAPPORT A UNE SPHÈRE

287. Considérons une sphère de centre O (fig. 224) et de rayon r et deux points A et B. Si la droite AB rencontre la sphère en deux points C et D conjugués harmoniques par rapport à AB, la sphère de diamètre AB est orthogonale à la sphère O [285]. Réciproquement, si la sphère de diamètre AB est orthogonale à la sphère O et que la droite AB coupe la sphère O en deux points C et D, ces deux points sont conjugués harmoniques par rapport à AB [285].

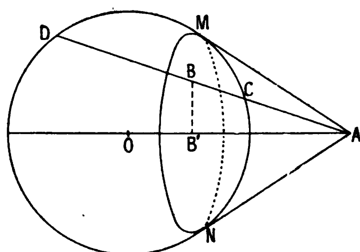


Fig. 224.

Dans tous les cas, que AB rencontre ou non la sphère O, nous dirons que les deux points A et B sont *conjugués par rapport à la sphère* O, lorsque la sphère de diamètre AB est orthogonale à la sphère O.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, en appelant B' la projection de B sur OA, on ait

$$\text{OA}.\text{OB}' = r^2, \tag{1}$$

ou que le produit géométrique des deux vecteurs OA, OB soit égal au carré du rayon de la sphère.

Cette relation (1) prouve que le lieu des conjugués

de A par rapport à la sphère est le plan P perpendiculaire à la droite OA au point B′ de cette droite défini par la relation (1). Ce plan P se nomme le *plan polaire du point* A *par rapport à la sphère*.

La relation (1) montre encore que, étant donné un plan quelconque P *ne passant pas par le centre de la sphère*, il existe un point A, et un seul, dont ce plan soit le plan polaire; ce point A se nomme *le pôle du plan* P *par rapport à la sphère*.

1° Si le point A est sur la sphère, $OA = r$, donc aussi $OB' = r$, c'est-à-dire que *le plan polaire d'un point de la sphère est le plan tangent en ce point*.

2° Si le point A est extérieur à la sphère (fig. 224), $OA > r$, donc $OB' < r$; le plan polaire P coupe la sphère suivant un petit cercle MN. Tous les points de ce cercle étant conjugués de A sont, d'après ce qu'on vient de voir [1°], les points de contact des plans tangents issus de A. Donc *le plan polaire d'un point extérieur est le plan du cercle de contact du cône circonscrit à la sphère ayant pour sommet ce point*.

3° Si le point A est intérieur à la sphère, $OA < r$, donc $OB' > r$; le plan polaire P est extérieur à la sphère.

288. **Théorème fondamental.** — *Si un point* A *est dans le plan polaire d'un point* B, *réciproquement le point* B *est dans le plan polaire de* A; car A et B sont conjugués.

En d'autres termes, *si deux plans sont tels que le premier passe par le pôle du second, réciproquement le second passe par le pôle du premier*. On exprime ce fait en disant que les deux plans sont *conjugués par rapport à la sphère*.

Corollaires. — I. *Le pôle du plan passant par trois points est le point commun aux plans polaires de ces trois points.* Réciproquement, *le plan polaire du point commun à trois plans est le plan passant par les pôles de ces trois plans.*

II. *Si un point se déplace dans un plan, son plan polaire pivote autour du pôle de ce plan.* Réciproquement, *si un plan pivote autour d'un point, son pôle se déplace dans le plan polaire de ce point.*

CHAPITRE V.

APPLICATIONS DE L'INVERSION

INVERSEUR DE PEAUCELLIER

289. Considérons (fig. 225) un losange articulé ABCD dont deux sommets opposés B et D sont reliés à un point

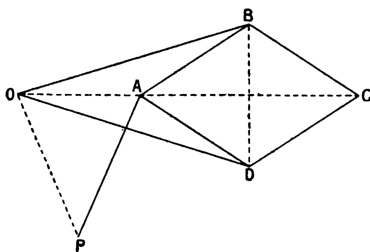


Fig. 225.

fixe O par deux tiges OB, OD de même longueur. Quand le système se déforme, les trois points O, A, C sont tou-

jours en ligne droite, car ils sont sur la perpendiculaire au milieu de BD.

De plus, le produit OA.OC reste constant; car ce produit peut être considéré comme la puissance du point O par rapport au cercle de centre B et de rayon BA, donc

$$OA.OC = \overline{OB}^2 - \overline{BA}^2.$$

Donc, si le point A décrit une ligne quelconque, le point C décrit la ligne inverse par rapport au pôle O et à la puissance $\overline{OB}^2 - \overline{BA}^2$. En particulier, si l'on fait décrire au point A un cercle, en le reliant par une tige rigide à un point fixe P, le point C décrira, en général, un autre cercle. Si, de plus, la longueur de la tige AP est égale à la distance des deux points fixes O et P, le point A décrira un cercle passant par le pôle; donc le point C décrira une droite, ou plutôt une portion de droite, car la distance OC ne peut dépasser OB + BC. Donc cet appareil, qu'on appelle l'*inverseur de Peaucellier*, réalise la transformation du mouvement circulaire alternatif en un mouvement rectiligne alternatif.

INVERSEUR DE HART

290. Considérons (fig. 226) un quadrilatère croisé ABCD, appelé *contre-parallélogramme*, formé de quatre tiges articulées égales deux à deux, savoir :

$$AB = CD, \qquad AD = BC.$$

Quand le système se déforme, les droites AC et BD restent parallèles et le produit AC.BD est constant. En effet, les triangles ABC et CDA sont égaux, comme ayant les trois

côtés égaux chacun à chacun ; donc les angles BAC et DCA sont égaux. Par suite, si E est le point d'intersection de AC

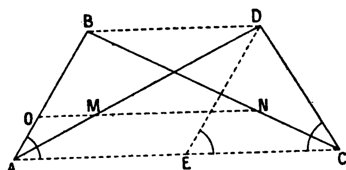


Fig. 226.

et de la parallèle à AB menée par D, l'angle DEC est égal à l'angle DCA ; donc

$$DE = DC = BA.$$

On en conclut d'abord que la figure ABDE est un parallélogramme, comme ayant deux côtés opposés, DE et BA, égaux et parallèles ; donc BD est parallèle et égal à AE et

$$AC.BD = AC.AE.$$

Mais on peut considérer AC.AE comme la puissance du point A par rapport au cercle de centre D et de rayon DC ; donc

$$AC.BD = AC.AE = \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2 = \text{const.}$$

Cela posé, prenons sur les trois tiges AB, AD, CB trois points O, M, N qui partagent ces trois tiges dans le même rapport

$$\frac{AO}{AB} = \frac{AM}{AD} = \frac{CN}{CB} = k.$$

Les droites OM et ON sont respectivement parallèles à BD et à AC ; donc les trois points O, M, N restent en ligne droite quand le contre-parallélogramme se déforme.

De plus,

$$OM = k.BD, \qquad ON = AC\frac{OB}{AB} = AC(1-k);$$

donc

$$OM.ON = k(1-k)BD.AC$$
$$= k(1-k)\left(\overline{AD}^2 - \overline{DC}^2\right) = \text{const.}$$

Il en résulte que, si l'on fixe le point O et qu'on fasse décrire au point M une ligne quelconque, le point N décrira la ligne inverse par rapport au pôle O et à la puissance $k(1-k)\left(\overline{AD}^2 - \overline{DC}^2\right)$. En particulier, si le point M décrit un cercle, le point N décrira un cercle ou une droite, comme dans l'inverseur de Peaucellier.

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE

291. Étant donnés (fig. 227) une sphère S, un point O de cette sphère et un plan P parallèle au plan tangent en O, on appelle *projection stéréographique* d'un point A de la sphère sur le plan P le point de rencontre A′ de la droite OA avec le plan P, c'est-à-dire la perspective du point A sur le plan P, en prenant pour point de vue le point O.

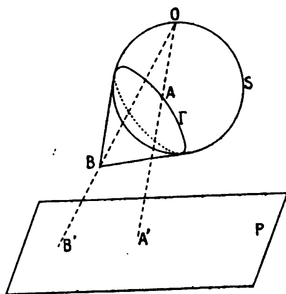


Fig. 227.

Or nous savons [269] que la sphère S et le plan P peuvent être regardés comme inverses par rapport au point O; donc toute ligne tracée sur la sphère et sa pro-

jection stéréographique sont des figures inverses. Par conséquent :

1° *La projection stéréographique conserve les angles;*

2° *La projection stéréographique d'un cercle* Γ *de la sphère est un cercle* Γ'.

Pour trouver le centre de ce cercle Γ', considérons la sphère Σ passant par Γ et ayant pour centre le sommet B du cône circonscrit à S suivant Γ. Cette sphère Σ est orthogonale à S; donc son inverse Σ' est orthogonale au plan P et, par suite, a son centre B' dans le plan P. Or B' est aussi sur OB, donc B' est la perspective de B sur le plan P. D'ailleurs, Γ' est l'intersection de Σ' et de P; donc B' est aussi le centre de Γ'. Par conséquent :

3° *Le centre de la projection stéréographique d'un cercle de la sphère est la perspective du sommet du cône circonscrit à la sphère suivant ce cercle.*

CHAPITRE VI

SINUS, COSINUS, TANGENTE, COTANGENTE DES ANGLES COMPRIS ENTRE ZÉRO ET DEUX DROITS

292. Soit (fig. 228) XOZ un angle aigu; prenons sur le côté OZ deux points quelconques M, M_1 et abaissons MP, M_1P_1 perpendiculaires sur OX. Les triangles OPM,

OP_1M_1 étant semblables, on a

$$\frac{PM}{OM} = \frac{P_1M_1}{OM_1},$$
$$\frac{OP}{OM} = \frac{OP_1}{OM_1},$$
$$\frac{PM}{OP} = \frac{P_1M_1}{OP_1},$$
$$\frac{OP}{PM} = \frac{OP_1}{P_1M_1}.$$

Donc les quatre rapports $\frac{PM}{OM}$, $\frac{OP}{OM}$, $\frac{PM}{OP}$, $\frac{OP}{PM}$ sont indé-

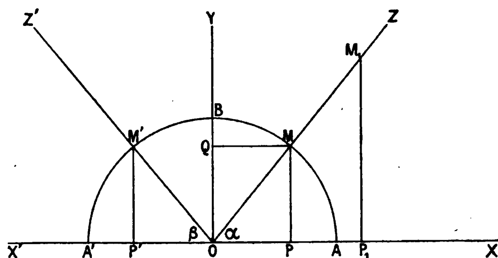


Fig. 228.

pendants de la position du point M sur le côté OZ; ils ne dépendent que de la grandeur de l'angle XOZ. On les nomme respectivement le *sinus,* le *cosinus,* la *tangente* et la *cotangente* de l'angle XOZ. En désignant cet angle par α, on écrit, pour abréger,

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{PM}{OM}, \\ \cos\alpha &= \frac{OP}{OM}, \\ \operatorname{tang}\alpha &= \frac{PM}{OP}, \\ \cot\alpha &= \frac{OP}{PM}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

On en déduit

$$PM = OM \sin\alpha,$$

$$OP = OM \cos\alpha,$$

$$PM = OP \tang\alpha,$$

$$OP = PM \cot\alpha.$$

Ainsi, *dans tout triangle rectangle : 1° un côté de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse par le sinus de l'angle opposé ou par le cosinus de l'angle aigu adjacent; 2° un côté de l'angle droit est égal au produit de l'autre par la tangente de l'angle opposé ou par la cotangente de l'angle aigu adjacent.*

Des définitions (1) on déduit les relations

$$\left.\begin{aligned} \tang\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \\ \cot\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tang\alpha}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

De plus, le théorème de Pythagore donne

$$\overline{PM}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2,$$

ou

$$\frac{\overline{PM}^2}{\overline{OM}^2} + \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OM}^2} = 1,$$

c'est-à-dire

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (3)$$

Ensuite, si l'on mène OY perpendiculaire à OX, du côté de OZ, on forme un angle YOZ, complémentaire de l'angle XOZ, par suite égal à $90° - \alpha$. Le sinus de cet angle est, par définition, $\frac{QM}{OM}$ ou $\frac{OP}{OM}$; donc

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha.$$

De même la tangente de l'angle YOZ est $\frac{QM}{OQ}$ ou $\frac{OP}{PM}$; donc

$$\text{tang}(90° - \alpha) = \cot \alpha.$$

Ainsi, *le cosinus d'un angle aigu n'est pas autre chose que le sinus de l'angle complémentaire et, de même, la cotangente d'un angle aigu est la tangente de l'angle complémentaire.*

Si l'on fait tourner la demi-droite OZ de façon que l'angle XOZ angmente de 0° à 90°, le point M décrit un quadrant AB et l'on voit aisément que :

Le sinus croît de 0 à 1,
Le cosinus décroît de 1 à 0,
La tangente croît de 0 à $+\infty$,
La cotangente décroît de $+\infty$ à 0.

293. Si l'on continue à faire tourner la demi-droite OZ, on obtient un angle obtus XOZ'. Prenons sur OZ' un point quelconque M' et soit P' la projection de M' sur le prolongement OX' de OX. Le segment P'M' est de même sens que PM; donc nous continuerons à le représenter par le nombre arithmétique qui mesure sa longueur. Au contraire, le segment OP' est de sens contraire à celui de OP; donc, conformément à la convention générale [G.P. 130], nous le représenterons par un nombre négatif ayant pour valeur absolue le nombre qui mesure sa longueur, de sorte qu'en désignant ce nombre négatif par $\overline{OP'}$, on a

$$\overline{OP'} = -OP'.$$

D'ailleurs les quatre rapports $\frac{P'M'}{OM'}$, $\frac{\overline{OP'}}{OM'}$, $\frac{P'M'}{\overline{OP'}}$, $\frac{\overline{OP'}}{P'M'}$ sont toujours indépendants de la position du point M' sur

la demi-droite OZ′ et ne dépendent, par conséquent, que de la grandeur de l'angle XOZ′. On continue à les nommer respectivement le *sinus*, le *cosinus*, la *tangente* et la *cotangente* de l'angle XOZ′. En désignant cet angle par α', on écrit

$$\sin\alpha' = \frac{P'M'}{OM'},$$

$$\cos\alpha' = \frac{\overline{OP'}}{OM'} = -\frac{OP'}{OM'},$$

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{P'M'}{\overline{OP'}} = -\frac{P'M'}{OP'},$$

$$\cot\alpha' = \frac{\overline{OP'}}{P'M'} = -\frac{OP'}{P'M'}.$$

On en déduit, comme ci-dessus,

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{\sin\alpha'}{\cos\alpha'},$$

$$\cot\alpha' = \frac{\cos\alpha'}{\sin\alpha'} = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha'},$$

$$\sin^2\alpha' + \cos^2\alpha' = 1.$$

D'ailleurs, $\frac{P'M'}{OM'}$, $\frac{OP'}{OM'}$, $\frac{P'M'}{OP'}$, $\frac{OP'}{P'M'}$ sont respectivement le sinus, le cosinus, la tangente, la cotangente de l'angle aigu X′OZ′. En désignant cet angle aigu par β, on a

$$\sin(180° - \beta) = \sin\beta,$$

$$\cos(180° - \beta) = -\cos\beta,$$

$$\operatorname{tang}(180° - \beta) = -\operatorname{tang}\beta,$$

$$\cot(180° - \beta) = -\cot\beta.$$

Ainsi, *deux angles supplémentaires ont même sinus, tandis que leurs cosinus, ainsi que leurs tangentes et leurs cotangentes, sont égaux en valeur absolue, mais de signes contraires.*

En faisant tourner la demi-droite OZ′ de façon que l'angle XOZ′ augmente de 90° à 180°, le point M′ décrit le quadrant BA′ et l'on voit aisément que

$\sin\alpha'$ décroît de 1 à 0,
$\cos\alpha'$ décroît de 0 à -1,
$\tan\alpha'$ croît de $-\infty$ à 0,
$\cot\alpha'$ décroît de 0 à $-\infty$.

294. **Théorème des sinus.** — *Dans tout triangle les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.*

Soit (fig. 229 et 230) ABC un triangle et soient O le centre et R le rayon du cercle circonscrit, D le milieu de l'arc BDC compris entre les côtés de l'angle A; le

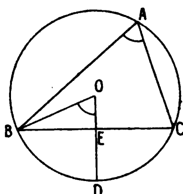


Fig. 229.

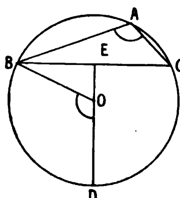


Fig. 230.

rayon OD est perpendiculaire au milieu E du côté BC opposé au sommet A et l'angle BOD (fig. 229 et 230) est égal à l'angle A. Par définition,

$$\sin A = \sin BOD = \frac{BE}{OB} = \frac{BC}{2OB} = \frac{a}{2R};$$

donc

$$\frac{a}{\sin A} = 2R.$$

La démonstration est encore valable si $A = 90°$; dans ce cas d'ailleurs $a = 2R$ et $\sin A = 1$ et la relation est vérifiée.

On aurait de même

$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \qquad \frac{c}{\sin C} = 2R;$$

donc

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

295. **Théorème du cosinus.** — *Dans tout triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins le double produit de ces deux côtés multiplié par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

Soit (fig. 231 et 232) ABC un triangle; abaissons la hauteur CD.

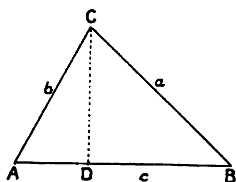


Fig. 231.

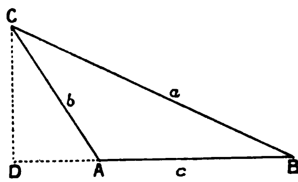


Fig. 232.

1° Si l'angle A est aigu, on a [G.P. 162]

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c.AD,$$
$$AD = b \cos A,$$

d'où

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \qquad (1)$$

2° Si l'angle A est obtus, on a [G.P. 162]

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c.AD,$$
$$AD = b \cos(180° - A) = -b \cos A,$$

d'où l'on déduit encore la relation (1).

3° Si l'angle A est droit, on a

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

et, comme $\cos A = 0$, la relation (1) est encore vérifiée.

Donc cette relation est vérifiée dans tous les cas.

On a, par analogie,

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \qquad (2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \qquad (3)$$

AIRE D'UN TRIANGLE, D'UN PARALLÉLOGRAMME

296. Soit (fig. 233 et 234) ABC un triangle. En abaissant la hauteur CH, on a

$$\text{aire ABC} = \tfrac{1}{2}\,\text{AB.CH}$$

et

$$\text{CH} = \text{AC}\sin\widehat{\text{HAC}}.$$

Or l'angle HAC est égal à l'angle BAC (fig. 233) ou sup-

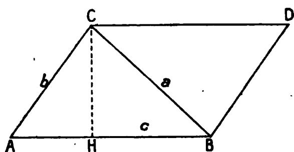


Fig. 233.

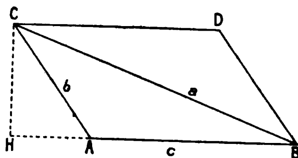


Fig. 234.

plémentaire de cet angle (fig. 234); dans les deux cas, les deux angles HAC, BAC ont même sinus. Donc

$$\text{aire ABC} = \tfrac{1}{2}\,\text{AB.AC}\sin\widehat{\text{BAC}}$$

ou

$$\text{aire ABC} = \tfrac{1}{2}\,bc\sin A.$$

De même,

$$\text{aire ABC} = \tfrac{1}{2}\, ca \sin B = \tfrac{1}{2}\, ab \sin C.$$

L'aire du parallélogramme ABDC est le double de celle du triangle ABC. Donc

$$\text{aire ABDC} = \text{AB.AC} \sin \widehat{\text{BAC}}.$$

Application. — *Si deux triangles ont un angle égal ou supplémentaire, leurs aires sont entre elles comme les produits des côtés qui comprennent cet angle, et réciproquement.*

En effet, soient ABC, A′B′C′ deux triangles. En désignant par b, c, b', c' les côtés AC, AB, A′C′, A′B′, on a

$$\text{ABC} = \tfrac{1}{2}\, bc \sin A,$$
$$\text{A}'\text{B}'\text{C}' = \tfrac{1}{2}\, b'c' \sin A';$$

d'où

$$\frac{\text{ABC}}{\text{A}'\text{B}'\text{C}'} = \frac{bc}{b'c'}\,\frac{\sin A}{\sin A'}.$$

Donc, pour que

$$\frac{\text{ABC}}{\text{A}'\text{B}'\text{C}'} = \frac{bc}{b'c'},$$

il faut et il suffit que

$$\sin A = \sin A',$$

c'est-à-dire que

$$A = A' \quad \text{ou} \quad A = 180^\circ - A'.$$

PROJECTION ORTHOGONALE D'UN SEGMENT SUR UN AXE

297. Soit (fig. 235) A′B′ la projection d'un vecteur AB sur un axe X′X, sur lequel on a choisi une

X′ vers X. Nous
$\overline{A'B'}$ la mesure
le nombre algé-
[illegible]i a pour valeur
le nombre qui
la longueur de
pour signe le
ou le signe —,
[illegible]e le sens de A′
est ou non le
[illegible]ue le sens de X′
Menons par A
[illegible]Y celle des deux
[illegible] sens que X′X.
[illegible]′B′, AB″ du seg-
[illegible]gales et de même
[illegible]e,

[illegible]

[illegible] on a

[illegible]

[illegible] (1)

[illegible], l'angle de AB
[illegible] par (X′X, AB),

[illegible] (2)

Dans ces formules, AB désigne le nombre absolu qui mesure la longueur AB. Mais rien n'empêche de choisir sur la droite qui porte le vecteur AB, ou sur une droite parallèle, un sens positif, par exemple celui de Z' vers Z, et alors nous représenterons par $\overline{AB}$ la mesure algébrique du vecteur, c'est-à-dire le nombre algébrique qui a pour valeur absolue le nombre qui mesure la longueur AB et pour signe le signe + ou le signe —, selon que le sens de A vers B est ou non le même que le sens de Z' vers Z. Considérons successivement les deux cas :

1° AB est de même sens que AZ (fig. 235). Dans ce cas

$$\overline{AB} = + AB, \qquad \cos\widehat{YAB} = \cos\widehat{YAZ},$$

donc l'égalité (1) devient

$$\overline{A'B'} = \overline{AB}\cos\widehat{YAZ}.$$

2° AB et AZ sont de sens contraires (fig. 236). Dans

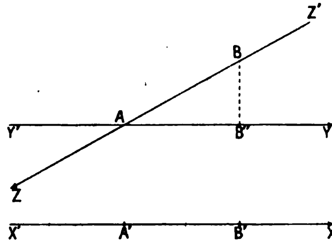


Fig. 236.

ce cas,

$$\overline{AB} = - AB$$

et

$$\cos\widehat{YAB} = - \cos\widehat{YAZ},$$

car les angles YAB, YAZ sont supplémentaires. Donc,

dans ce cas, l'égalité (1) peut encore s'écrire

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \widehat{YAZ}.$$

Or l'angle YAZ est, par définition, l'angle des deux directions X'X, Z'Z; en désignant cet angle par

$$(X'X,\ Z'Z),$$

on a

$$\text{proj.}\, AB = \overline{A'B'} \cos(X'X,\ Z'Z).$$

Ainsi, *la mesure algébrique de la projection orthogonale d'un vecteur sur un axe est égale au produit de la mesure algébrique de ce vecteur par le cosinus de l'angle des deux directions positives qu'on a choisies pour mesurer ce vecteur et sa projection.*

Application. — Soit (fig. 237) ABC un triangle quel-

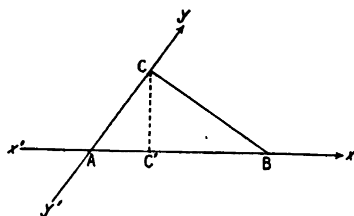


Fig. 237.

conque et soit C' la projection de C sur AB; on a, dans tous les cas, en grandeur et en signe [G. P. 162],

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}.\overline{AC'}.$$

Prenons une direction positive arbitraire $x'x$ pour mesurer les segments AB, AC' et une direction positive arbitraire $y'y$ pour mesurer le segment AC; nous aurons

$$\overline{AC'} = \overline{AC} \cos(x'x,\ y'y);$$

d'où

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}.\overline{AC}.\cos(x'x, y'y).$$

En particulier, prenons pour $x'x$ le sens de A vers B et pour $y'y$ le sens de A vers C, et désignons par a, b, c les nombres arithmétiques qui mesurent les longueurs des côtés BC, CA, AB; la relation précédente devient

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

On retrouve ainsi la relation établie au n° 295.

PROJECTION D'UNE AIRE PLANE

298. **Théorème.** — *La projection d'une aire plane sur un plan est égale au produit de cette aire par le cosinus de l'angle aigu de son plan et du plan de projection.*

1° Soit (fig. 238) ABC un triangle dont un côté BC est

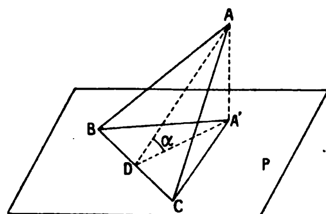


Fig. 238.

dans le plan de projection P. Abaissons AA' perpendiculaire sur ce plan, puis A'D perpendiculaire sur BC; la droite AD est également perpendiculaire à BC, d'après le

théorème des trois perpendiculaires. Donc

$$\text{aire ABC} = \tfrac{1}{2}\,\text{BC} \times \text{AD},$$
$$\text{aire A'BC} = \tfrac{1}{2}\,\text{BC} \times \text{A'D}.$$

De plus, ADA′ est le rectiligne du dièdre formé par le plan ABC avec le plan P. En désignant cet angle par α, on a

$$\text{A'D} = \text{AD} \cos\alpha;$$

donc

$$\text{aire A'BC} = \text{aire ABC} \times \cos\alpha$$

ou

$$\text{proj. ABC} = \text{aire ABC} \times \cos\alpha.$$

2° Considérons un triangle ABC dont un côté BC est parallèle au plan de projection P. Dans ce cas, on peut mener par BC un plan P′ parallèle à P; or les projections du triangle ABC sur les deux plans P et P′ sont égales, comme sections droites d'un même prisme; donc on a encore

$$\text{proj. ABC} = \text{aire ABC} \times \cos\alpha.$$

3° Considérons (fig. 239 et 240) un triangle ABC dont

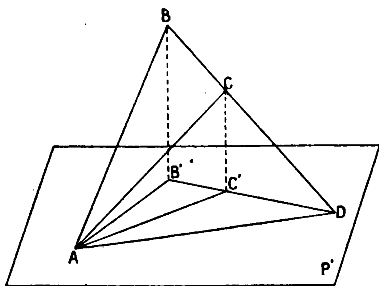


Fig. 239.

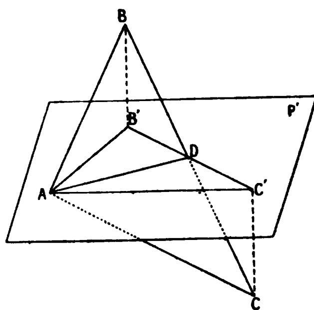


Fig. 240.

aucun côté ne soit parallèle au plan de projection P. Menons par A le plan P′ parallèle à P; ce plan P′ coupe

le côté BC en un point D. Si ce point D est sur le prolongement de BC, on a

$$\begin{aligned}\text{proj. ABC} &= \text{ADB}' - \text{ADC}',\\ &= \text{ADB} \times \cos\alpha - \text{ADC} \times \cos\alpha,\\ &= \text{ABC} \times \cos\alpha.\end{aligned}$$

Si le point D est entre B et C, on a

$$\begin{aligned}\text{proj. ABC} &= \text{ADB}' + \text{ADC}',\\ &= \text{ADB} \times \cos\alpha + \text{ADC} \times \cos\alpha,\\ &= \text{ABC} \times \cos\alpha.\end{aligned}$$

4° Soit S l'aire d'un polygone plan; décomposons-le en triangles T_1, T_2, T_3. En désignant toujours par α l'angle aigu formé par le plan du polygone avec le plan de projection, on a

$$\begin{aligned}\text{proj. S} &= \text{proj. } T_1 + \text{proj. } T_2 + \text{proj. } T_3,\\ &= (T_1 + T_2 + T_3) \cos\alpha,\\ &= \text{S} \cos\alpha.\end{aligned}$$

299. Le théorème, étant démontré pour un polygone quelconque, s'étend à une aire limitée par une courbe plane fermée, en considérant cette aire comme la limite d'un polygone inscrit.

Ainsi, on peut considérer [224] une ellipse de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$ comme la projection d'un cercle de rayon a dont le plan fait avec le plan de l'ellipse un angle dont le cosinus soit égal à $\frac{b}{a}$. Or l'aire du cercle est πa^2, donc celle de l'ellipse sera égale à $\pi a^2 \times \frac{b}{a}$ ou πab.

EXERCICES

1. Démontrer que, si x est un angle aigu,

$$1 < \sin x + \cos x \leq \sqrt{2},$$

$$\frac{1}{\sin x} < 1 + \cot x.$$

2. Démontrer que le carré d'une aire plane est égal à la somme des carrés de ses projections sur trois plans rectangulaires.

CHAPITRE VII

SYMÉTRIES DU CUBE ET DE L'OCTAÈDRE RÉGULIER

300. Le point d'intersection I des diagonales d'un cube est évidemment un centre de symétrie de ce cube. On constate qu'il n'y en a pas d'autre [1] en examinant successivement les milieux de toutes les droites qui joignent les sommets deux à deux.

On en déduit que tout axe de symétrie du cube passe par le centre I; car, autrement, on aurait un deuxième centre, savoir le symétrique I' de I par rapport à cet axe,

---

[1] On peut aussi le démontrer en remarquant que le point I est équidistant des huit sommets. Or, si O est un centre de symétrie du cube, le symétrique I' de I par rapport à O serait aussi équidistant des huit sommets; car la symétrie de centre O transforme I en I' et transforme le système des huit sommets en lui-même. Mais il n'y a évidemment qu'un point équidistant des huit sommets, savoir le centre de la sphère circonscrite au cube. Donc I et I' coïncident, et, par conséquent, le point O, qui est le milieu de II', coïncide avec I.

puisque la symétrie par rapport à cet axe transforme I en I′ et transforme le cube en lui-même.

On prouve de même que tout plan de symétrie du cube passe par le centre.

Il en résulte immédiatement que, si Δ (fig. 241) est un axe de symétrie du cube, le plan P perpendiculaire à Δ et passant par le centre I est un plan de symétrie de ce cube. En effet, soient A un sommet du cube, A′ le symétrique de A par rapport à I et A″ le symétrique de A′ par rapport à Δ. Par hypothèse, A′ et A″ sont des sommets du cube;

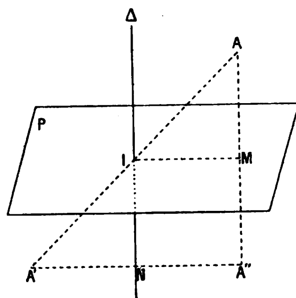


Fig. 241.

il s'agit de prouver que A et A″ sont symétriques par rapport au plan P. Or, la droite Δ passe par I, d'après ce qu'on a vu plus haut, et, par hypothèse, elle passe aussi par le milieu de A′A″; donc elle est parallèle à AA″. On en conclut que la droite AA″ est perpendiculaire au plan P en un point M. Ensuite, les droites IM et A′A″ étant toutes deux perpendiculaires à Δ dans le plan AA′A″ sont parallèles. Comme I est le milieu de AA′, on en conclut que M est le milieu de AA″. Donc A et A″ sont symétriques par rapport au plan P.

On prouve de même que, si P est un plan de symétrie du cube, la perpendiculaire à ce plan menée par le centre I est un axe de symétrie.

Donc le nombre des axes de symétrie d'un cube est égal à celui de ses plans de symétrie.

Pour trouver tous les plans de symétrie, il n'y a rien de mieux à faire que d'examiner successivement tous les

plans perpendiculaires aux milieux des droites qui joignent les sommets du cube deux à deux. Ces plans sont au nombre de treize. Les trois plans perpendiculaires aux milieux de quatre arêtes opposées et les six plans tels que ACA'C' (fig. 242), perpendiculaires aux diagonales des faces, sont effectivement des plans de symétrie. Les quatre autres, savoir les plans perpendiculaires aux milieux des diagonales du cube, ne sont pas des plans de symétrie. Par exemple, on voit aisément que le symétrique C_1 de C par rapport au plan [1] perpendiculaire au milieu de AA' n'est pas un sommet du cube; car, CC_1 étant parallèle à AA', le point C_1 est dans le plan ACA'C' et ne coïncide avec aucun des quatre sommets du cube situés dans ce plan.

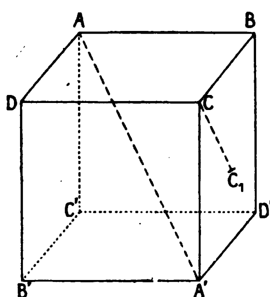


Fig. 242.

Il y a donc seulement neuf plans de symétrie et, par suite, neuf axes de symétrie respectivement perpendiculaires à ces neuf plans, savoir les trois droites qui joignent les centres de deux faces opposées et les six droites qui joignent les milieux de deux arêtes opposées.

301. En général, on dit qu'une droite Δ est un *axe d'ordre n* d'une figure lorsqu'en faisant tourner la figure autour de la droite Δ d'un angle égal à $\frac{360^\circ}{n}$, c'est-à-dire en lui faisant faire le $n^{\text{ième}}$ d'un tour complet, on obtient

---

(1) Ce plan passe par les milieux des côtés de l'hexagone gauche BCDB'C'D'B; car chacun de ces milieux est équidistant de A et de A'.

une seconde figure coïncidant avec la première. L'axe se nomme *binaire, ternaire* ou *quaternaire* selon que $n = 2$, 3 ou 4. Pour $n > 4$, on n'a pas créé de noms particuliers, on dit simplement : *axe d'ordre n*. Un axe binaire, et, en général, un axe d'ordre pair, est un axe de symétrie proprement dit.

Ainsi, la perpendiculaire au plan d'un parallélogramme menée par le point de rencontre des diagonales est un axe binaire.

La perpendiculaire au plan d'un triangle équilatéral menée par le centre de ce triangle est un axe ternaire. En général, la perpendiculaire au plan d'un polygone régulier, convexe ou étoilé, de n côtés, menée par le centre de ce polygone, est un axe d'ordre n.

Pour trouver directement les axes d'un cube, il nous faut donc chercher les rotations qui amènent ce cube en coïncidence avec lui-même.

Considérons d'abord deux cubes égaux. On peut les faire coïncider en faisant coïncider une face F du premier avec l'une des six faces du second; de plus, on peut faire coïncider la face F avec une face F′ du second cube, en faisant coïncider un sommet A de F avec l'un quelconque des quatre sommets de F′. Donc on peut faire coïncider deux cubes égaux de 24 manières différentes.

Mais, s'il s'agit de faire coïncider un cube avec lui-même, l'une de ces 24 manières consiste à faire coïncider chaque sommet avec lui-même, c'est-à-dire à laisser le cube immobile. Donc il n'y a que 23 déplacements proprement dits qui amènent le cube en coïncidence avec lui-même. Examinons successivement ces 23 déplacements et montrons que chacun d'eux peut s'effectuer au moyen d'une rotation.

1° Les trois déplacements qui font coïncider avec elle-même la face ABCD (fig. 243) et, par suite, aussi la face opposée A'B'C'D', peuvent s'effectuer en faisant tourner le cube d'un, deux ou trois angles droits autour de la droite HH' qui joint les centres de ces deux faces. Donc cette droite HH' est un axe quaternaire.

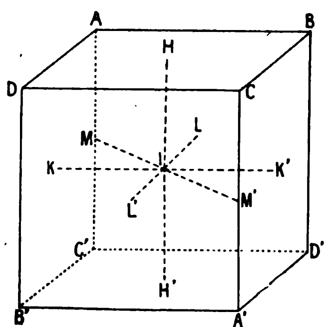


Fig. 243.

Il y en a deux autres analogues : KK' et LL'.

2° Le déplacement qui fait coïncider la face ABCD avec la face opposée A'B'C'D' et le point A avec le point C' peut s'effectuer en faisant tourner le cube de 180° autour de la droite MM' qui joint les milieux des côtés opposés AC', CA'. Cette droite MM' est donc un axe binaire.

Il y en a cinq autres analogues, joignant les milieux des cinq autres couples d'arêtes opposées.

3° Considérons le déplacement qui fait coïncider le cube avec lui-même de façon que la face ABCD coïncide avec AC'D'B et que le point A coïncide avec lui-même. Comme le cube n'a qu'un centre, il faut que ce déplacement fasse aussi coïncider le centre I avec lui-même; donc ce déplacement laisse fixe les deux points A et I, et, par conséquent, peut s'effectuer au moyen d'une rotation autour de la diagonale AIA'. D'ailleurs on peut s'en rendre compte directement en remarquant que le point A est équidistant de B, C', D et qu'il en est de même de A'; donc la droite AA' est perpendiculaire au plan du triangle équilatéral BC'D et passe par le centre de ce triangle. De

même, AA' est perpendiculaire au plan du triangle équilatéral B'CD' et passe par le centre de ce triangle. On en conclut que, si l'on fait tourner le cube de 120° autour de AA', dans un sens ou dans l'autre, il revient coïncider avec lui-même.

Donc AA' est un axe ternaire. Il en est de même des trois autres diagonales BB', CC', DD'.

Ainsi le cube a six axes binaires, quatre axes ternaires, trois axes quaternaires; ce qui fait bien neuf axes d'ordre pair, ou neuf axes de symétrie proprement dits, comme nous l'avions trouvé ci-dessus.

302. On appelle *octaèdre régulier* le polyèdre qui a pour sommets les extrémités de trois droites égales et rectangulaires HH', KK', LL' (fig. 244) qui se coupent en leur milieu.

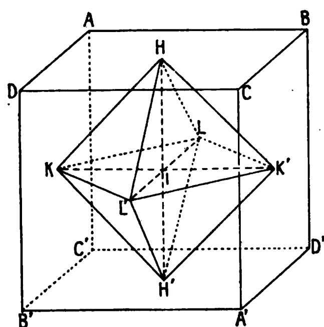


Fig. 244.

Les sommets d'un octaèdre régulier sont les centres des faces d'un cube et réciproquement. Donc les symétries d'un octaèdre régulier sont les mêmes que celles d'un cube. Ainsi, un octaèdre régulier a :

1° Un centre de symétrie : le point de rencontre des diagonales;

2° Neuf plans de symétrie, savoir : les trois plans contenant chacun deux diagonales et les six plans perpendiculaires aux milieux de deux arêtes opposées;

3° Six axes binaires : les bissectrices des angles des diagonales;

4° Quatre axes ternaires, joignant les centres de deux faces opposées;

5° Trois axes quaternaires : les trois diagonales.

EXERCICES

1. Les projections des sommets d'un cube sur une diagonale partagent cette diagonale en trois parties égales.

2. La section faite dans un cube par un plan perpendiculaire au milieu d'une diagonale est un hexagone régulier.

3. La projection d'un cube sur un plan perpendiculaire à une diagonale est un hexagone régulier.

CHAPITRE VIII

VECTEURS

303. On dit que deux vecteurs AB, A'B' sont *équipollents* lorsqu'ils sont égaux, portés par la même droite ou par des droites parallèles, et de même sens. Pour cela il faut et il suffit que le milieu de AB' coïncide avec celui de BA'.

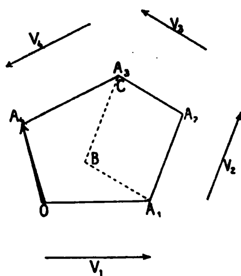


Fig. 245.

Étant donnés (fig. 245) plusieurs vecteurs V_1, V_2, V_3, V_4, par exemple, si, à partir d'un point arbitraire O, on construit un vecteur OA_1 équipollent à V_1, puis un vecteur A_1A_2 équipollent à V_2, ensuite un vecteur A_2A_3 équipollent à V_3, enfin un vecteur A_3A_4 équipollent à V_4, le vecteur OA_4, ou tout autre vecteur équipollent, s'appelle la *somme géométrique* des vecteurs V_1, V_2, V_3, V_4.

Pour justifier cette définition, il faut montrer que, si

l'on intervertit l'ordre des vecteurs, en conservant l'origine O, le point d'arrivée A_4 ne change pas. En effet, supposons d'abord que l'on intervertisse l'ordre de deux vecteurs consécutifs, V_2 et V_3 par exemple. Alors, à partir du point A_1, il faudra prendre un vecteur A_1B équipollent à V_3, puis un vecteur BC équipollent à V_2; mais, comme $A_1BA_3A_2$ est un parallélogramme, BA_3 est équipollent à V_2; donc C coïncide avec A_3. Donc on peut, sans changer la somme, intervertir l'ordre de deux vecteurs consécutifs et, par conséquent, intervertir l'ordre d'une façon quelconque.

On en déduit, en raisonnant comme on fait en Arithmétique sur un produit de facteurs, que l'on peut, sans changer la somme, remplacer deux ou plusieurs vecteurs par leur somme effectuée.

Si l'on prend une autre origine O', on obtient évidemment un vecteur $O'A'_4$ équipollent à OA_4.

La somme géométrique de plusieurs vecteurs s'appelle souvent la *résultante* de ces vecteurs. Mais il est préférable de réserver le mot *résultante* pour le cas où les vecteurs ont même origine et de dire que, dans ce cas, la résultante des vecteurs est le vecteur équipollent à leur somme géométrique et ayant pour origine leur origine commune. Ainsi, la résultante des deux vecteurs OA, OB (fig. 246) est le vecteur OC qui joint le point O au quatrième sommet du parallélogramme construit sur OA et OB.

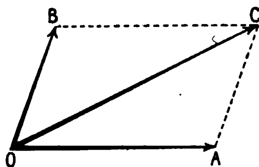


Fig. 246.

304. Étant donné un nombre quelconque de points A,

B, C, ..., K, L sur une droite, le vecteur AL est la somme géométrique des vecteurs AB, BC, ..., KL; donc la formule de Chasles

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{KL} = \overline{AL}$$

peut s'énoncer en disant que le *nombre algébrique* qui mesure la somme géométrique de plusieurs vecteurs portés par la même droite ou par des droites parallèles est la somme des nombres algébriques qui mesurent ces vecteurs.

De même, le théorème des projections, démontré au nº 72, peut s'énoncer ainsi :

Le nombre algébrique qui mesure la projection sur un axe de la somme géométrique de plusieurs vecteurs est la somme des nombres algébriques qui mesurent les projections de ces vecteurs.

MOMENTS

305. Soient (fig. 247) AB, CD deux vecteurs non situés dans un même plan; on dit que CD est *dextrorsum* ou *sinistrorsum* par rapport à AB, selon qu'un observateur placé sur AB, les pieds en A, la tête en B et regardant CD, voit C à sa gauche et D à sa droite, ou inversement.

Si CD (fig. 247) est, par exemple, *dextrorsum* par rapport à AB, de même AB est *dextrorsum* par rapport à CD. On le voit facilement de la façon suivante. On peut supposer, car cela ne change rien, que la perpendiculaire commune aux droites qui portent les deux vecteurs soit précisément la droite AC; on peut en outre supposer AB = CD. Faisons tourner la figure de 180 degrés autour

de la droite X′X perpendiculaire au milieu O de AC et menée dans le plan bissecteur du dièdre BACD; alors CD prend la place de AB et AB celle de CD.

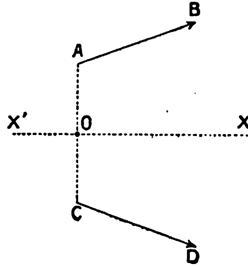


Fig. 247.

Soit ABC un triangle; si un mobile parcourt la circonférence circonscrite dans un sens tel qu'il rencontre les sommets dans l'ordre A, B, C, on dit qu'il décrit le *cycle* ABC ou BCA ou CAB; s'il parcourt la circonférence dans le sens contraire, on dit qu'il décrit le cycle CBA ou BAC ou ACB.

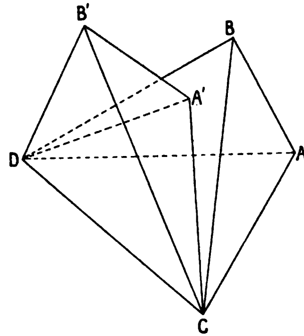


Fig. 248.

Considérons (fig. 248) un tétraèdre ABCD dont les sommets sont rangés dans un ordre déterminé. Du sommet A, le cycle BCD paraît décrit dans un certain sens; il est facile de se rendre compte que du sommet B le cycle ACD paraît décrit dans le sens inverse. Pour le voir, imaginons qu'on fasse tourner le triangle ACD autour de CD pour l'appliquer sur le plan BCD, le point A venant en A′ du même côté que B par rapport à CD; alors B sera entraîné dans le mouvement et viendra en B′

de sorte que A et B′ se trouveront de part et d'autre du plan BCD. Or les cycles A′CD et BCD sont décrits dans le même sens, et on les voit évidemment de sens contraires quand on les regarde de A et de B′. Donc, de B, le cycle ACD paraît décrit en sens contraire du cycle BCD vu de A.

Pour ce motif, nous regarderons les volumes ABCD et BACD comme ayant des valeurs opposées. Comme d'ailleurs les cycles BCD et CBD vus de A ont des sens contraires, nous écrirons d'après cela

$$\mathrm{ABCD} = -\,\mathrm{ACBD} = \mathrm{CABD} = -\,\mathrm{CADB} = \mathrm{CDAB}, \text{ etc.}$$

Reste à fixer le signe de ABCD. On peut convenir que ce signe sera $+$ si de A on voit le cycle BCD décrit en sens inverse des aiguilles d'une montre, c'est-à-dire si CD est dextrorsum par rapport à AB, et alors, d'après ce qui précède, AB sera aussi dextrorsum par rapport à CD.

Ces conventions posées, nous appellerons *moment de* AB *par rapport à* CD, ou *de* CD *par rapport à* AB, le produit 6ABCD pris en grandeur et en signe, c'est-à-dire la mesure algébrique de 6ABCD.

Il est facile d'évaluer la valeur absolue de ce moment. En effet, en multipliant par 6 le volume du tétraèdre ABCD on obtient précisément le volume du parallélépipède qui a pour arêtes AB, AC, CD. Or, en désignant par θ l'angle des deux droites AB, CD et par p la plus courte distance de ces deux droites, le volume du parallélépipède a pour mesure (p. 104, ex. 1)

$$p.\mathrm{AB}.\mathrm{CD}.\sin\theta.$$

Telle est la valeur absolue du moment de AB par rapport à CD.

On voit d'ailleurs que ce moment ne change pas ni de valeur absolue, ni de signe, quand on fait subir à chacun des vecteurs AB et CD un mouvement de glissement sur son support.

MOMENT PAR RAPPORT A UN AXE; MOMENT PAR RAPPORT A UN POINT

306. Nous appellerons (fig. 249) *moment d'un vecteur* AB *par rapport à un axe orienté* $x'x$ le moment de AB par rapport à un vecteur OC porté par l'axe $x'x$ et égal à $+1$ (en supposant qu'on ait fait choix, dans la figure, d'une unité de longueur), c'est-à-dire la mesure algébrique de 6 OCAB. Le moment ainsi défini est un *nombre m* indépendant du point O de l'axe que l'on prend pour origine du segment unitaire OC; ce nombre change de signe quand on change l'orientation de l'axe, car alors OC change de sens. Mais, si l'on prend sur l'axe un vecteur OD dont la mesure algébrique soit égale à ce nombre *m*, le sens du vecteur OD ainsi défini est indépendant de l'orientation de l'axe. Si OCAB est positif, OD est de même sens que OC; si OCAB est négatif, OC et OD sont de sens contraires; donc, dans les deux cas, ODAB est positif, c'est-à-dire que OD est dextrorsum par rapport à AB. De plus, on a, en valeur absolue,

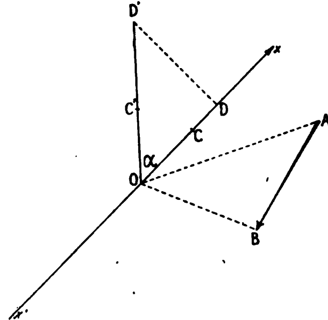


Fig. 249.

$$OD = 6\,OCAB = 2\,OAB \cos\alpha, \qquad (1)$$

en désignant par α l'angle aigu formé par l'axe $x'x$ avec la perpendiculaire au plan OAB. Le vecteur OD ainsi défini, ou tout autre vecteur équipollent, s'appelle le *vecteur-moment* de AB par rapport à la droite $x'x$.

Nous appellerons *vecteur-moment* ou simplement *moment d'un vecteur* AB *par rapport à un point* O le vecteur-moment de AB par rapport à la perpendiculaire au plan OAB menée par O. D'après ce qui précède, pour construire ce vecteur-moment, il n'y a qu'à mener par O un vecteur OD′ perpendiculaire au plan OAB, dextrorsum par rapport à AB et ayant pour mesure le double du nombre qui mesure l'aire du triangle OAB :

$$OD' = 2\,\text{aire}\,OAB. \qquad (2)$$

307. Théorème. — *Le moment par rapport à un axe orienté $x'x$ d'un vecteur* AB *est égal à la mesure algébrique de la projection sur cet axe du vecteur-moment de* AB *par rapport à un point quelconque* O *de cet axe.*

En effet, conservons les notations précédentes. Prenons (fig. 249) sur l'axe $x'x$ un segment OC égal à $+1$ et sur la perpendiculaire au plan OAB menée par O un segment OC′ dextrorsum par rapport à AB et de longueur égale à l'unité. On a, en grandeur et en signe,

$$6\,OCAB = 6\,OC'AB \cos COC'.$$

Or le vecteur-moment de AB par rapport au point O est un vecteur OD′ porté par la droite OC′, de même sens que OC′ et dont la longueur est mesurée par le nombre positif 6OC′AB. Donc

$$6\,OCAB = OD' \cos COC'.$$

Or 6OCAB est le moment de AB par rapport à l'axe $x'x$

et COC′ ou COD′ est l'angle formé par la direction positive OC de cet axe avec la direction de OD′; donc le moment de AB par rapport à $x'x$ est égal au nombre algébrique qui mesure la projection de OD′ sur l'axe $x'x$.

Remarque. — Soit OD le vecteur-moment de AB par rapport à $x'x$; OD et OD′ sont tous deux dextrorsum par rapport à AB, donc d'un même côté du plan OAB, et, comme OD′ est perpendiculaire à ce plan, l'angle DOD′ est aigu [79] et alors les formules (1) et (2) montrent que

$$\mathrm{OD} = \mathrm{OD}' \cos \mathrm{DOD}',$$

c'est-à-dire que OD est la projection de OD′.

308. Théorème. — *Le vecteur-moment de* AB *par rapport à une droite* $x'x$ *est équipollent au moment de la projection* A′B′ *de* AB *sur un plan perpendiculaire à* $x'x$ *en un point* O, *par rapport à ce point.*

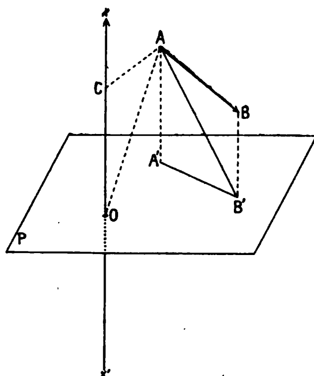


Fig. 250.

En effet, prenons (fig. 250) sur $x'x$ un segment OC de longueur égale à l'unité, dans un sens arbitraire. On a,

en grandeur et en signe,

$$OCAB = OCAB' = OCA'B'.$$

Car, BB' étant parallèle au plan OCA, les points B et B' sont d'un même côté de ce plan; donc le cycle OCA paraît décrit dans le même sens pour un observateur placé en B que pour un observateur placé en B'; donc OCAB et OCAB' sont de même signe. De plus, les tétraèdres OCAB, OCAB' sont équivalents, comme ayant même base OCA et même hauteur. Donc OCAB = OCAB'. On voit de même que OCAB' = OCA'B'.

Donc le vecteur-moment de AB par rapport à $x'x$ est équipollent à celui de A'B' par rapport à $x'x$ ou, ce qui revient au même, par rapport au point O.

309. Théorème. — *La somme des moments par rapport à un axe de plusieurs vecteurs concourants est égale au moment de leur résultante.*

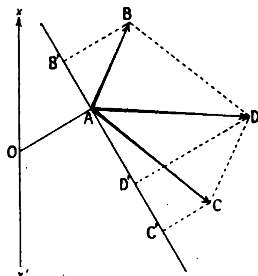


Fig. 251.

Soit (fig. 251) AD la résultante de deux vecteurs concourants AB, AC; prenons d'abord les moments par rapport à un axe $x'x$ perpendiculaire au plan ABC en un point O. Pour cela, projetons B, C, D en B', C', D' sur

la perpendiculaire à OA menée par A dans le plan ABC. On a

$$\text{mom}\,AB = OA \times \overline{AB'},$$
$$\text{mom}\,AC = OA \times \overline{AC'},$$
$$\text{mom}\,AD = OA \times \overline{AD'},$$

en considérant les segments AB′, AC′, AD′ comme positifs ou négatifs selon qu'ils sont dextrorsum ou sinistrorsum par rapport à l'axe $x'x$. Or

$$\overline{AB'} + \overline{AC'} = \overline{AD'}.$$

Donc,

$$\text{mom}\,AB + \text{mom}\,AC = \text{mom}\,AD.$$

La proposition s'étend immédiatement au cas d'un axe quelconque, en projetant AB, AC, AD sur un plan perpendiculaire à l'axe [308].

310. *Corollaire.* — Si l'on considère les moments des deux vecteurs AB, AC et de leur résultante AD par rapport à un point O, les mesures des projections de ces moments sur un axe arbitraire passant par O sont les moments par rapport à cet axe. Donc la projection sur cet axe du moment de la résultante AD est égale à la somme des projections des moments de AB et AC; l'axe ayant une direction arbitraire, on en conclut que le vecteur-moment de AD par rapport au point O est la somme géométrique des vecteurs-moments de AB et de AC par rapport à ce même point O.

MOMENT D'UN COUPLE

311. On appelle *couple* un système de deux vecteurs V et W parallèles, de sens contraires et de même longueur l.

Prenons les moments par rapport à un point quelconque O (fig. 252). Pour cela, menons par ce point le plan perpendiculaire aux deux vecteurs V et W, rencontrant le premier en A, le second en B. Les valeurs absolues des moments de V et de W par rapport à O sont $l \times OA$ et $l \times OB$. Pour construire les vecteurs-moments, faisons tourner le triangle AOB dans son plan d'un angle droit et dans un sens tel que, si OA′B′ est la position du triangle après la rotation, OB′ soit dextrorsum par rapport à W et, par conséquent, OA′ sinistrorsum par rapport à V. Alors, en prenant sur les demi-droites OA′, OB′ deux points A″ et B″ tels que

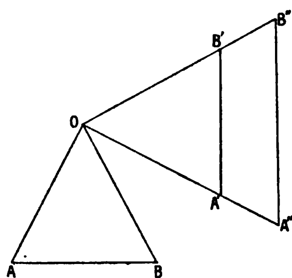


Fig. 252.

$$OA'' = OA' \times l, \qquad OB'' = OB' \times l,$$

le vecteur-moment de V par rapport à O sera A″O et celui de W sera OB″; donc leur somme géométrique sera le vecteur A″B″, de longueur égale à $AB \times l$ et perpendiculaire à AB, donc indépendant de la position du point O.

312. *Corollaire.* — Soient (fig. 253) O et O′ deux points et V un vecteur. Menons par O le vecteur OA équipollent à V et le vecteur OA′ égal et directement opposé à OA, et désignons par (O, V) le moment par rapport à O de V, par (O′, OA) celui de OA par rapport à O′, etc. On a évidemment

$$(O', OA) + (O', OA') = 0,$$

d'où

$$(O', V) = (O', V) + (O', OA') + (O', OA).$$

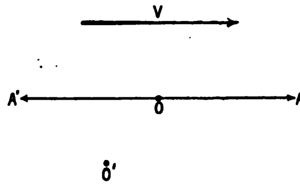


Fig. 253.

Or V et OA′ forment un couple; donc, d'après ce qu'on vient de voir,

$$(O', V) + (O', OA') = (O, V) + (O, OA') = (O, V);$$

donc enfin,

$$(O', V) = (O, V) + (O', OA).$$

C'est ce qu'on appelle la *formule du changement d'origine.*

MOMENT RÉSULTANT

313. Soit S un système de vecteurs V_1, V_2, ..., V_n. On appelle *moment résultant* de ce système par rapport à un point O et l'on désigne par (O, S) la somme géométrique des moments des vecteurs du système par rapport au point O.

Menons par O le vecteur OA_k équipollent à V_k et soit O′ un autre point quelconque. La formule du changement d'origine donne

$$(O', V_k) = (O, V_k) + (O', OA_k).$$

En faisant $k = 1, 2, \ldots, n$ et en additionnant les éga-

lités ainsi obtenues, on a

$$(O', S) = (O, S) + \Sigma(O', OA_k).$$

Mais, en désignant par OR la résultante des vecteurs OA_1, OA_2, ..., OA_n, on a [310]

$$\Sigma(O', OA_k) = (O', OR).$$

Donc,

$$(O', S) = (O, S) + (O', OR).$$

Le vecteur OR s'appelle la *résultante de translation du système relative au point* O. Donc :

Le moment résultant d'un système par rapport à un point O' *est la somme géométrique du moment résultant par rapport à un autre point* O *et du moment par rapport à* O' *de la résultante de translation relative au point* O.

FIN

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE V

DROITES ET PLANS

CHAPITRE PREMIER. — LE PLAN

CHAPITRE II

CHAPITRE III

CHAPITRE IV. — DROITE ET PLAN PERPENDICULAIRES

CHAPITRE V. — ANGLES DIÈDRES

CHAPITRE VI

CHAPITRE VII. — PLANS PARALLÈLES

CHAPITRE VIII. — PROJECTIONS ORTHOGONALES

CHAPITRE IX. — ANGLES POLYÈDRES

CHAPITRE X

LIVRE VI

POLYÈDRES

CHAPITRE PREMIER. — GÉNÉRALITÉS SUR LES POLYÈDRES

CHAPITRE II. — VOLUME DU PRISME

CHAPITRE III. — VOLUME DE LA PYRAMIDE

CHAPITRE IV. — SYMÉTRIE

CHAPITRE V. — HOMOTHÉTIE ET SIMILITUDE

LIVRE VII

LES CORPS RONDS

CHAPITRE PREMIER. — NOTIONS SUR LES SURFACES CONIQUES, CYLINDRIQUES ET DE RÉVOLUTION

CHAPITRE II. — CYLINDRE ET CÔNE DE RÉVOLUTION, AIRE DE LA SURFACE LATÉRALE. DÉVELOPPEMENT, VOLUME

CHAPITRE III. — PREMIÈRES NOTIONS SUR LA SPHÈRE

CHAPITRE IV. — FIGURES TRACÉES SUR LA SPHÈRE

CHAPITRE V. — AIRE ET VOLUME DE LA SPHÈRE

LIVRE VIII

COURBES USUELLES

CHAPITRE PREMIER. — ELLIPSE

CHAPITRE II. — HYPERBOLE

CHAPITRE III. — PARABOLE

CHAPITRE IV. — PROPRIÉTÉS COMMUNES AUX TROIS COURBES

CHAPITRE V

COMPLÉMENTS

CHAPITRE PREMIER. — INVERSION

CHAPITRE II. — NOTIONS DE PERSPECTIVE

CHAPITRE III

CHAPITRE IV

CHAPITRE V

CHAPITRE VI

CHAPITRE VII

CHAPITRE VIII. — VECTEURS

39386 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.